ISSN 1411 - 3481

PERHITUNGAN TRANSFORMASI FOURIER CEPAT 1-DIMENSI DENGAN RADIKS GABUNGAN EMPAT DAN DUA SERTA CONTOH PENGGUNAANNYA

R.S. Lasijo
Puslitbang Teknik Nuklir, BATAN, Bandung

ABSTRAK

PERHITUNGAN TRANSFORMASI FOURIER CEPAT 1-DIMENSI DENGAN RADIKS EMPAT DAN DUA SERTA CONTOH PENGGUNAANNYA. Metode perhitungan Transformasi Fourier Cepat 1-dimensi telah disusun berdasarkan teori Cooley dan Tukey dengan radiks (bilangan dasar) kombinasi 4 dan 2, dengan pilihan hanya radiks 4 yang dipergunakan bila banyaknya data merupakan kelipatan dari 4, tetapi bilamana harus dipergunakan kombinasi 4 dan 2, maka hanya satu radiks 2 yang dipergunakan. Contoh penentuan fungsi konvolusi dan korelasi kemudian diberikan atas dasar perhitungan transformasi Fourier cepat tersebut.

Kata kunci : transformasi fourier cepat, radiks 4 dan 2, fungsi konvolusi, fungsi korelasi.

ABSTRACT

CALCULATIONS OF 1-DIMENSIONAL FAST FOURIER TRANSFORM WITH COMBINATION OF RADIXES FOUR AND TWO AND ITS APPLICATION EXAMPLES. Method of calculation for 1-dimensional Fast Fourier Transform is described based on Cooley and Tukey theory with radixes (base numbers) the combination of 4 and 2, with preference of using radix 4 if the number of data can be stated as the multiplication of 4, but in case the combination of 4 and 2 has to be used, only a single radix 2 is included. Examples of the determinations of convolution and correlation functions are then given based on the calculation of the Fast Fourier Transform.

Key words : fast fourier transform, radices 4 and 2, convolution function, correlation function.

 ISSN 1411 - 3481

PENDAHULUAN

Untuk menyederhanakan suatu persoalan desain atau analisis, banyak orang condong untuk melakukan transformasi dengan harapan bahwa persoalan dapat dilihat atau diselesaikan secara lebih mudah dan sederhana. Salah satu transformasi ini adalah transformasi Fourier.

Transformasi Fourier sudah sejak lama dikenal sebagai salah satu alat analitis yang serba guna, artinya transformasi ini dapat dipakai untuk menyelesaikan persoalan dalam banyak bidang, antara lain bidang elektronika, zat mampat, mekanika struktur, mekanika gelombang, dan mekanika kuantum.
Sebelum komputer digit berkembang, transformasi Fourier yang kontinu merupakan transformasi yang banyak dipakai. Untuk sistem yang sederhana dan dengan jumlah data yang sedikit, penggunaan transformasi Fourier kontinu dapat dilakukan dengan sangat baik, tetapi bilamana sistem menjadi makin kompleks dan jumlah data makin banyak, maka penyelesaian transformasi Fourier akan sangat melelahkan atau bahkan tidak dapat dilakukan.

Setelah komputer digit berkembang, yang diikuti dengan perkembangan metodologi analisis numerik, maka orang mulai melihat adanya titik terang atas penggunaan transformasi Fourier yang diskrit, yang memungkinkan orang untuk menyelesaikan persoalan sistem yang kompleks maupun dengan data yang banyak. Maka metodologi analisis Fourier yang diskrit yang efisien mulai dikembangkan yang dipelopori antara lain oleh Cooley dan Tukey, yang kemudian dikenal dengan nama Transfomasi Fourier Cepat (Fast Fourier Transform).

ISSN 1411 - 3481

Ternyata dalam waktu selanjutnya metode Fourier Cepat ini juga dapat dipergunakan untuk menentukan fungsi-fungsi yang lain dengan sangat sederhana dan cepat, di antaranya adalah fungsi konvolusi dan fungsi korelasi yang sangat banyak dipakai dalam penentuan besaran-besaran terukur, baik dalam bidang sains maupun rekayasa.

TEORI

Transformasi Fourier dari suatu fungsi h(t) dapat dituliskan berbentuk

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j2\pi f t} dt \qquad (1)$$

dengan $j = \sqrt{-1}$. Pada umumnya H (f) merupakan fungsi berharga kompleks

$$H(f) = R(f) + j\, I(f) \qquad (2)$$

di mana R (f) dan I (f) berturut-turut bagian nyata dan bagian khayal dari H (f).

Transformasi inversi dari persamaan (1) adalah

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f)\, e^{j2\pi f t}\, df . \qquad (3)$$

Kedua besaran H (f) dan h (t) dinamakan pasangan transformasi Fourier dan dituliskan [1]

$$h(t) \Leftrightarrow H(f). \qquad (4)$$

Dalam banyak hal fungsi h (t) dipakai untuk menggambarkan besaran dalam domain waktu t dan H (f) menggambarkan besaran dalam domain frekuensi f.

Bentuk diskrit dari transformasi Fourier yang ekivalen dengan persamaan (1) adalah

 ISSN 1411 - 3481

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_o(k)\, e^{-j2\pi nk/N} \qquad (5)$$

dengan n = 0, 1, 2, ..., N – 1, di mana N banyaknya data, k besaran yang ekivalen dengan waktu, n besaran yang ekivalen dengan frekuensi, sedangkan X(n) adalah transformasi Fourier dari $x_o(k)$ yang harga-harganya banyaknya N. Transformasi inversinya yang ekivalen dengan persamaan (3) adalah

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n)\, e^{j2\pi nk/N} \qquad (6)$$

Banyaknya data N diuraikan sesuai dengan radiks yang dipakai, misalkan untuk radiks biner atau 2, yaitu yang menggunakan bilangan 0 dan 1 saja, harus dipilih bilangan γ yang bulat di mana N = 2^{γ}, dan untuk radiks 4 (0, 1, 2, 3) harus dipilih N = 4^{δ} dengan δ bilangan bulat yang lain.

Dalam transformasi Fourier persoalannya adalah bagaimana menghitung X(n) dari $x_o(k)$ yang diketahui dengan cara yang sangat efektif dan efisien. Untuk menyederhanakan notasi, diperkenalkan besaran baru

$$W = e^{-j2\pi/N} \qquad (7)$$

maka persamaan (5) dapat ditulis

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_o(k)\, W^{nk} \qquad (8)$$

dengan n = 0, 1, 2, ..., N-1.

Sebagai langkah pertama marilah dipergunakan radiks 2, yaitu bilangan biner yang paling dikenal oleh mesin yang hanya mempunyai dua harga 0 dan 1. Sebagai contoh ambillah N = 4 = 2γ, maka dalam

ISSN 1411 - 3481

hal ini γ = 2. Sekarang k dan n dapat kita nyatakan dalam bilangan biner ini, yaitu

k = 0, 1, 2, 3 (dalam desimal), menjadi k = (k_1 k_0) = 00, 01, 10, 11.

n = 0, 1, 2, 3 (dalam desimal), menjadi n = (n_1 n_0) = 00, 01, 10, 11 (9)

Bentuk hubungan kompak yang dapat kita pakai untuk k dan n ini adalah

$$k = 2k_1 + k_0 \qquad \text{dan} \qquad n = 2n_1 + n_0 \tag{10}$$

di mana k_1, k_0 , n_1 , n_0 dapat mempunyai harga 0 dan 1.

Dengan notasi seperti persamaan (10) maka persamaan (8) dapat ditulis

$$X(n_1 n_0) = \sum_{k_0=0}^{1} \sum_{k_1=0}^{1} x_0(k_1 k_0)\, W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)}. \tag{11}$$

Bila dilihat faktor W pada persamaan (11) didapat

$$W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} = W^{(2n_1+n_0)2k_1}\, W^{(2n_1+n_0)k_0} = W^{2n_0 k_1}\, W^{(2n_1+n_0)k_0} \tag{12}$$

Pada persamaan (12) telah dipakai hubungan bahwa $W^{4n_1 k_1} = 1$, sehingga persamaan (11) menjadi

$$X(n_1 n_0) = \sum_{k_0=0}^{1} \left[\sum_{k_1=0}^{1} x_0(k_1 k_0)\, W^{2n_0 k_1} \right] W^{(2n_1+n_0)k_0}. \tag{13}$$

Bila somasi dalam kurung pada persamaan (13) diberi nama $x_1(n_0\ k_0)$, yaitu

$$x_1(n_0\ k_0) = \sum_{k_1=0}^{1} x_0(k_1 k_0)\, W^{2n_0 k_1} \tag{14}$$

Dari persamaan (14) didapatkan harga-harga x_1, sehingga persamaan (11) dapat ditulis berbentuk

$$x_2(n_0\ n_1) = \sum_{k_0=0}^{1} x_1(n_0\ k_0)\, W^{(2n_1+n_0)k_0}. \tag{15}$$

Maka didapat transformasi Fourier dari $x_0(k_1 k_0)$, yaitu

$$X(n_1 n_0) = x_2(n_0 n_1). \qquad (16)$$

Yang perlu diperhatikan di sini adalah bahwa $X(n_1 n_0)$ yang dicari, sama dengan $x_2(n_0 n_1)$ dari somasi luar persamaan (13) yang kebetulan mempunyai harga bit yang terbalik, di mana bit dari $X(n_1 n_0)$ yaitu $(n_1 n_0)$, berbalikan dengan bit dari $x_2(n_0 n_1)$ yang tidak lain adalah $(n_0 n_1)$.

Penyelesaian persamaan (8) dengan cara yang berurutan dalam persamaan-persamaan (13), (14), dan (15) adalah dasar dari formulasi Cooley-Tukey untuk harga N = 4 dengan radiks 2 (biner), yang juga disebut persamaan-persamaan rekursif dari Cooley-Tukey untuk transformasi Fourier cepat [2].

Bila N = 16 dengan radiks 2, maka $\gamma = 4$, sehingga diperlukan 4 digit untuk indeksnya, yaitu

$$X(n_3 n_2 n_1 n_0) = \sum_{k_0=0}^{1}\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1}\sum_{k_3=0}^{1} x_0(k_3 k_2 k_1 k_0)\, W^{8n_0k_3}\, W^{(2n_1+n_0)4k_2} \times W^{(4n_3+2n_1+n_0)2k_1}\, W^{(8n_3+4n_2+2n_1+n_0)k_0} \qquad (17a)$$

$$x_1(n_0 k_2 k_1 k_0) = \sum_{k_3=0}^{1} x_0(k_3 k_2 k_1 k_0)\, W^{8n_0k_3} \qquad (17b)$$

$$x_2(n_0 n_1 k_1 k_0) = \sum_{k_2=0}^{1} x_1(n_0 k_2 k_1 k_0)\, W^{(2n_1+n_0)4k_2} \qquad (17c)$$

$$x_3(n_0 n_1 n_2 k_0) = \sum_{k_1=0}^{1} x_2(n_0 n_1 k_1 k_0)\, W^{(4n_3+2n_1+n_0)2k_1} \qquad (17d)$$

$$x_4(n_0 n_1 n_2 n_3) = \sum_{k_0=0}^{1} x_3(n_0 n_1 n_2 k_0)\, W^{(8n_3+4n_2+2n_1+n_0)k_0}. \qquad (17e)$$

Maka didapat transformasi Fourier dari $x_0(k_3 k_2 k_1 k_0)$, yaitu

$$X(n_3 n_2 n_1 n_0) = x_4(n_0 n_1 n_2 n_3). \qquad (18)$$

Bila menggunakan radiks 4 didapat $16 = 4^2$ berarti $\delta = 2$ dan hanya diperlukan 2 digit untuk indeksnya, serupa dengan N = 4 pada bilangan pokok 2, bedanya hanya pada harga-harga k dan n, yaitu

$$k = 4\,k_1 + k_0 \text{ dengan } k_1 = 0, 1, 2, 3 \text{ dan } k_0 = 0, 1, 2, 3$$

$$n = 4\,n_1 + n_0 \text{ dengan } n_1 = 0, 1, 2, 3 \text{ dan } n_0 = 0, 1, 2, 3\,. \qquad (19)$$

Maka dengan radiks 4 persamaan-persamaan (17a), (17b), (17c), (17d), (17e) menjadi

$$X(n_1\, n_0) = \sum_{k_0=0}^{3} \sum_{k_1=0}^{3} x_0(k_1\, k_0)\, W^{(4n_1+n_0)(4k_1+k_0)}$$

$$= \sum_{k_0=0}^{3} \sum_{k_1=0}^{3} x_0(k_1\, k_0)\, W^{4n_0 k_1}\, W^{(4n_1+n_0)k_0} \qquad (20a)$$

$$x_1(n_0\, k_0) = \sum_{k_1=0}^{3} x_0(k_1\, k_0)\, W^{4n_0 k_1} \qquad (20b)$$

$$x_2(n_0\, n_1) = \sum_{k_0=0}^{3} x_1(n_0\, k_0)\, W^{(4n_1+n_0)k_0} \qquad (20c)$$

$$X(n_1\, n_0) = x_2(n_0\, n_1)\,. \qquad (20d)$$

Membandingkan antara persamaan-persamaan (20a), (20b), (20c), (20d) dengan persamaan-persamaan (17a), (17b), (17c), (17d), (17e) terlihat bahwa penggunaan radiks yang lebih besar akan didapatkan persamaan yang lebih sederhana dan jumlah perhitungan yang lebih sedikit, berarti lebih efisien.

Formula penggunaan gabungan radiks lebih dari satu juga telah diberikan oleh Cooley-Tukey sebagai berikut [2]:

Misalkan N dapat diuraikan dalam m radiks $r_1, r_2, \ldots, r_m$, yaitu $N = r_1\, r_2 \,\ldots\, r_m$, maka k dan n dapat dinyatakan dalam radiks-radiks tersebut, yaitu

$$k = k_{m-1}(r_2\, r_3 \ldots r_m) + k_{m-2}(r_3\, r_4 \ldots r_m) + \quad \cdots \quad + k_1\, r_m + k_0 \qquad (21a)$$

$n = n_{m-1}\,(r_1\ r_2\ \dots r_{m-1}) + n_{m-2}\,(r_1\ r_2\ \dots r_{m-2}) + \cdots + n_1\ r_1 + n_0$ (21b)

di mana $k_i = 0, 1, 2, \dots, r_{m-i} - 1$ $\quad 0 \le i \le m - 1$

$n_{i-1} = 0, 1, 2, \dots, r_i - 1$ $\quad 1 \le i \le m,$

sehingga transformasi dapat ditulis

$$X(n_{m-1}\, n_{m-2} \dots n_1\, n_0) = \sum_{k_0} \sum_{k_1} \dots \sum_{k_{m-1}} x_0(\,k_{m-1}\ k_{m-2} \dots k_0\,)\, W^{nk}.$$

(22)

Sebagai contoh untuk N = 8, dapat digunakan radiks 4 dan 2, yaitu 8 = 4 x 2 dengan $r_1 = 4$ dan $r_2 = 2$, jadi m = 2, dan

$k = k_1\, r_2 + k_0 = 2\,k_1 + k_0$ di mana $k_0 = 0, 1$ dan $k_1 = 0, 1, 2, 3$

(23a)

$n = n_1\, r_1 + n_0 = 4\, n_1 + n_0$ di mana $n_0 = 0, 1, 2, 3$ dan $n_1 = 0, 1.$

(23b)

Penggunaan radiks-radiks gabungan dari yang besar sampai yang kecil akan menghasilkan banyaknya perhitungan yang makin sedikit dan waktu yang makin singkat, tetapi kesukaran akan dihadapi dalam penyusunan program komputer. Dalam penelitian ini dipergunakan hanya gabungan radiks 4 dan radiks 2 saja, dengan maksud di samping penyusunan program lebih sederhana, juga gabungan ini dapat dipergunakan untuk harga N genap berapa saja asalkan dapat dinyatakan dalam 2^{γ} dengan γ bilangan bulat.

PENGGUNAAN FAKTOR PERAN (TWIDDLE FACTOR)

Dari definisi W pada persamaan (7) dapat dituliskan

$$W^{nk} = (e^{-j2\pi/N})^{nk} = \cos\left(\frac{2\pi n k}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi n k}{N}\right) \qquad (24)$$

Sifat simetri dari fungsi cosinus dan sinus dapat dimanfaatkan untuk mendapatkan algoritme yang lebih efisien seperti yang dijelaskan berikut :

Misalkan untuk N = 16 dengan radiks 4, maka

$$n = 4\, n_1 + n_0 \text{ dan } k = 4\, k_1 + k_0 \qquad (25)$$

dengan n_1, $n_0 = 0, 1, 2, 3$ dan k_1, $k_0 = 0, 1, 2, 3$,

sehingga

$$n\,k = 4\, n_0\, k_1 + (4\, n_1 + n_0)\, k_0 + 16\, n_1\, k_1 = 4\, n_0\, k_1 + (4\, n_1 + n_0)\, k_0 .$$
(26)

Pada persamaan (26) telah dipergunakan identitas bahwa $W^{16 n_1 k_1} = 1$ sehingga $16 n_1\, k_1 = 0$.

Persamaan rekursifnya dapat ditulis menjadi

$$x_1(n_0\, k_0) = \sum_{k_1=0}^{3} x_0(k_1\, k_0)\; W^{4 n_0 k_1} \qquad (27a)$$

$$x_2(n_0\, n_1) = \sum_{k_0=0}^{3} x_1(n_0\, k_0)\; W^{(4 n_1 + n_0) k_0} \qquad (27b)$$

$$X(n_1\, n_0) = x_2(n_0\, n_1). \qquad (27c)$$

Persamaan-persamaan (27a), (27b), (27c) ini tidak lain adalah persamaan-persamaan (20a), (20b), (20c), (20d) yang dapat disusun agak berbeda sebagai berikut

$$X(n_1\, n_0) = \sum_{k_0=0}^{3} \left[\sum_{k_1=0}^{3} x_0(k_1\, k_0)\, W^{4 n_0 k_1} \right] W^{4 n_1 k_0}\, W^{n_0 k_0}$$

$$= \sum_{k_0=0}^{3} \left[\left\{ \sum_{k_1=0}^{3} x_0(k_1\, k_0)\, W^{4 n_0 k_1} \right\} W^{n_0 k_0} \right] W^{4 n_1 k_0}. \qquad (28)$$

Maka bentuk rekursifnya sekarang menjadi

$$x_1(n_0\, k_0) = \left\{ \sum_{k_1=0}^{3} x_0(k_1\, k_0)\, W^{4 n_0 k_1} \right\} W^{n_0 k_0} \qquad (29a)$$

$$x_2(n_0\, n_1) = \sum_{k_0=0}^{3} x_1(n_0\, k_0)\, W^{4 n_1 k_0} \qquad (29b)$$

$$X(n_1\, n_0) = x_2(n_0\, n_1). \qquad (29c)$$

Dari persamaan (29a), mengingat N = 16, maka, sebagai contoh diperoleh

Jurnal Sains dan Teknologi Nuklir Indonesia
Indonesian Journal of Nuclear Science and Technology
Vol. 1, No. 2, Agustus 2000 : 99 - 119

ISSN 1411 - 3481

$$W^{4 n_0 k_1} = (W^4)^{n_0 k_1} = \cos\left(\frac{\pi}{2} n_0 k_1\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{2} n_0 k_1\right). \qquad (30)$$

Dari persamaan (29a) terlihat bahwa $W^{4 n_0 k_1}$ hanya memiliki dua harga, yaitu $\pm j$ dan ± 1, tergantung pada harga dari bilangan bulat $n_0 k_1$ saja, sehingga suku-suku yang berada di dalam kurung kurawal dalam persamaan (29a) ini dapat dihitung tanpa melakukan perkalian sama sekali. Maka hasil dari persamaan (29a) dapat ditentukan oleh faktor di luar kurung kurawal tersebut, yaitu $W^{n_0 k_0}$ yang disebut faktor peran (twiddle factor). Hal yang sama dapat pula diterapkan pada persamaan (29b) dan seterusnya.

Dengan menggunakan faktor peran tersebut persamaan rekursif secara umum dapat ditulis sebagai berikut :

$$x_i (n_0 n_1 \ldots n_{i-1} k_{m-i-1} \ldots k_0)$$
$$= \left[\sum_{k_{m-i}} x_{i-1} (n_0 n_1 \ldots n_{i-2} k_{m-i} \ldots k_0)\, W^{n_{i-1} k_{m-i} \left(\frac{N}{r_i}\right)} \right]$$
$$\times\ W^{[n_{i-1}(r_1 r_2 \ldots r_{i-1}) + \cdots + n_1 r_1 + n_0] k_{m-i-1} (r_{i-2} \ldots r_m)}. \qquad (31)$$

PEMBALIKAN INDEKS

Dari pembahasan terdahulu didapatkan bahwa indeks dari X(n) mempunyai urutan yang berbalikan dengan indeks dari x(n), yaitu misalnya untuk N = 16 dengan radiks 4, maka

$$X(n_1 n_0) = x_2 (n_0 n_1). \qquad (32)$$

Urutan indeks dalam desimal (radiks 10) dan radiks 4 tertera pada Tabel 1.

Tabel 1. Indeks X dan x dalam desimal dan radiks 4

Desi mal	Radiks 4	Desi mal	Radiks 4	Desi mal	Radiks 4	Desi mal	Radiks 4
0	00	4	10	8	20	12	30
1	01	5	11	9	21	13	31
2	02	6	12	10	22	14	32
3	03	7	13	11	23	15	33

Kesesuaian indeks X dengan x dalam desimal tertera pada Tabel 2.

Tabel 2. Kesesuaian indeks X dengan x dalam desimal

X	x	X	x	X	x	X	x
0	0	4	1	8	2	12	3
1	4	5	5	9	6	13	7
2	8	6	9	10	10	14	11
3	12	7	13	11	14	15	15

Diperlukan pengecekan terhadap indeks-indeks tersebut dan mengubahnya bilamana indeks dari X belum bersesuaian dengan indeks dari x. Bilamana banyaknya data N tetap, dan hanya dipergunakan satu macam radiks saja, maka penyusunan program komputer dalam pembalikan indeks tidak begitu rumit. Akan tetapi bilamana N sebarang (tetapi genap dan dapat dinyatakan dengan 2^{γ} dengan γ bilangan bulat), dan bilamana harus dipergunakan lebih dari satu radiks, maka perlu berhati-hati dalam penyusunan programnya supaya kesesuaian indeks tetap terjaga. Sebagai contoh untuk N = 32 dengan gabungan radiks 4 dan 2, maka 32 = 4x4x2 dengan m = 3 dan $r_1 = 4$, $r_2 = 4$, $r_3 = 2$. Hubungan indeksnya dalam desimal dan radiks 4 & 2 tertera pada Tabel 3.

Tabel 3. Indeks dalam desimal dan radiks gabungan 4&2

Desi mal	Radiks 4 & 2	Desi mal	Radiks 4 & 2	Desi mal	Radiks 4 & 2	Desi mal	Radiks 4 & 2
0	000	8	100	16	200	24	300
1	001	9	101	17	201	25	301
2	010	10	110	18	210	26	310
3	011	11	111	19	211	27	311
4	020	12	120	20	220	28	320
5	021	13	121	21	221	29	321
6	030	14	130	22	230	30	330
7	031	15	131	23	231	31	331

Di sini kesesuaian indeks dari

$$X(n_2\, n_1\, n_0) = x_2(n_0\, n_1\, n_2) \qquad (33)$$

tidak mudah dilihat dari Tabel 3 tersebut di atas hanya dengan menggunakan rumus yang sama dengan hanya membalik indeksnya saja, misalnya indeks desimal ke-5

$$X(021) = x_3(120). \qquad (33a)$$

Dengan radiks campuran 4 & 2 seperti pada Tabel 3 pembalikan dapat dilakukan, tetapi harus menggunakan rumus yang berbeda untuk indeks X dan x_3, yaitu

untuk indeks X:

$$I(X) = n_2 * 4^1 * 2^1 + n_1 * 4^0 * 2^1 + n_0 * 2^0$$
$$= 0 * 4 * 2 + 2 * 1 * 2 + 1 * 1 = 0 + 4 + 1 = 5, \qquad (34)$$

bersesuaian dengan indeks untuk x_3 yaitu

$$I(x_3) = n_2 * 4^2 + n_1 * 4^1 + n_0 * 4^0$$
$$= 1 * 16 + 2 * 4 + 0 * 1 = 16 + 8 = 24. \qquad (35)$$

Jadi untuk indeks desimal X yang ke-5 persesuaiannya adalah indeks desimal x_3 yang ke-24.

ISSN 1411 - 3481

PENGGUNAAN DALAM FUNGSI KONVOLUSI DAN KORELASI

Yang paling banyak dipergunakan sebenarnya bukanlah transformasi Fourier itu sendiri, tetapi fungsi-fungsi lain seperti fungsi konvolusi dari x(k) dan h(k) yang berbentuk

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)\, h(k-i) \tag{36}$$

dan fungsi korelasi dari x(k) dan h(k) yang berbentuk

$$z(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)\, h(k+i). \tag{37}$$

Fungsi-fungsi tersebut dapat dihitung dengan Transformasi Fourier Cepat dengan lebih mudah dan sederhana. Perhitungan fungsi konvolusi dan korelasi dilakukan misalnya pada pemrosesan sinyal (signal processing), filter elektronik (electronic filtering) [3,4,5], analisis sistem, dan sebagainya, di mana x(k) pada umumnya berupa data masukan yang didapat secara manual atau secara automatik dari suatu sistem deteksi yang berupa sinyal-sinyal elektronik, sedangkan h(k) berupa respons dari peralatan, dan y(k) atau z(k) berupa keluaran.

Untuk menghitung fungsi konvolusi dari x(k) dan h(k), pertama-tama dihitung transformasi Fourier dari masing-masing x (k) dan h (k), yaitu

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j2\pi nk/N} \tag{38}$$

$$H(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)\, e^{-j2\pi nk/N}. \tag{39}$$

Kalikan hasilnya untuk mendapatkan Y(n)

$$Y(n) = X(n) \cdot H(n). \tag{40}$$

Kemudian lakukan transformasi inversi dari Y(n) untuk mendapatkan fungsi konvolusi y(k) yang dimaksud, yaitu

$$y(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(n)\ e^{+j2\pi n k/N}. \quad (41)$$

Bila y(k) berupa bilangan nyata, maka dapat pula dipergunakan transformasi maju, yaitu

$$y(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y^{*}(n)\ e^{-j2\pi n k/N} \quad (42)$$

di mana $Y^{*}(n)$ adalah pasangan kompleks (complex conjugate) dari Y(n).

Untuk menghitung fungsi korelasi caranya hampir sama, yaitu dihitung fungsi transformasi Fourier dari masing-masing x(k) dan h(k), kemudian bentuk fungsi Z (n)

$$Z(n) = X(n) \cdot H^{*}(n) \quad (43)$$

di mana H* (n) adalah pasangan kompleks dari H (n), dan akhirnya lakukan transformasi inversi dari Z (n) untuk mendapatkan z (k)

$$z(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Z(n)\ e^{+j2\pi n k/N}. \quad (44)$$

Bila z (k) bilangan nyata dapat dipergunakan transformasi maju

$$z(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Z^{*}(n)\ e^{-j2\pi n k/N} \quad (45)$$

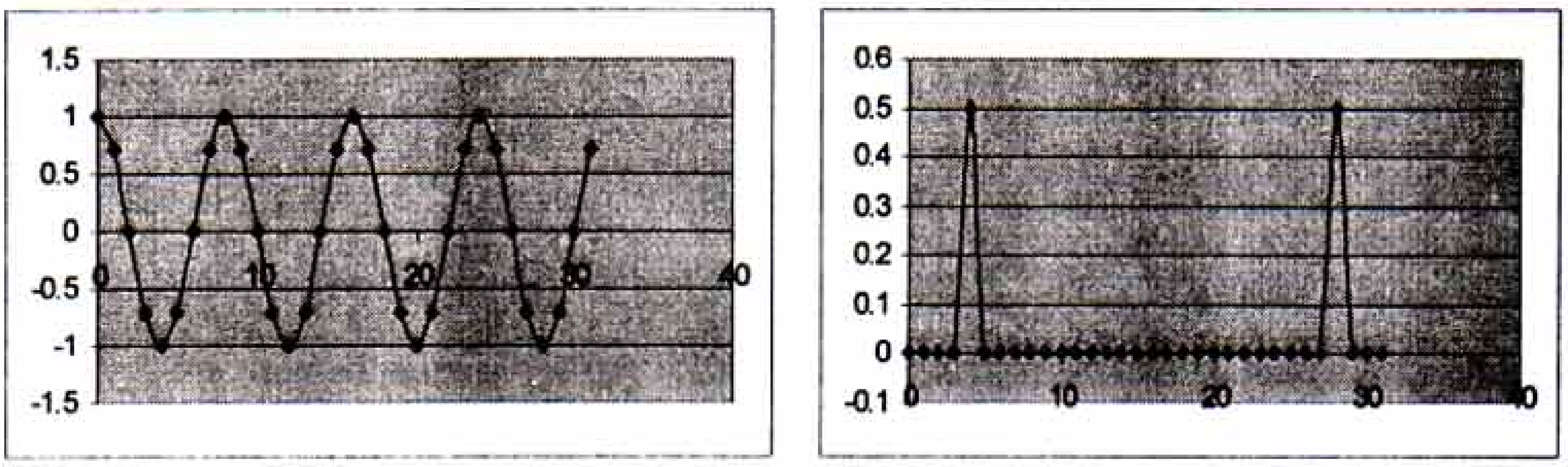
dengan Z*(n) pasangan kompleks dari Z(n).

PERHITUNGAN DAN HASILNYA

Sebagai contoh pertama diberikan perhitungan untuk menentukan transformasi Fourier dari suatu fungsi periodik yang berbentuk

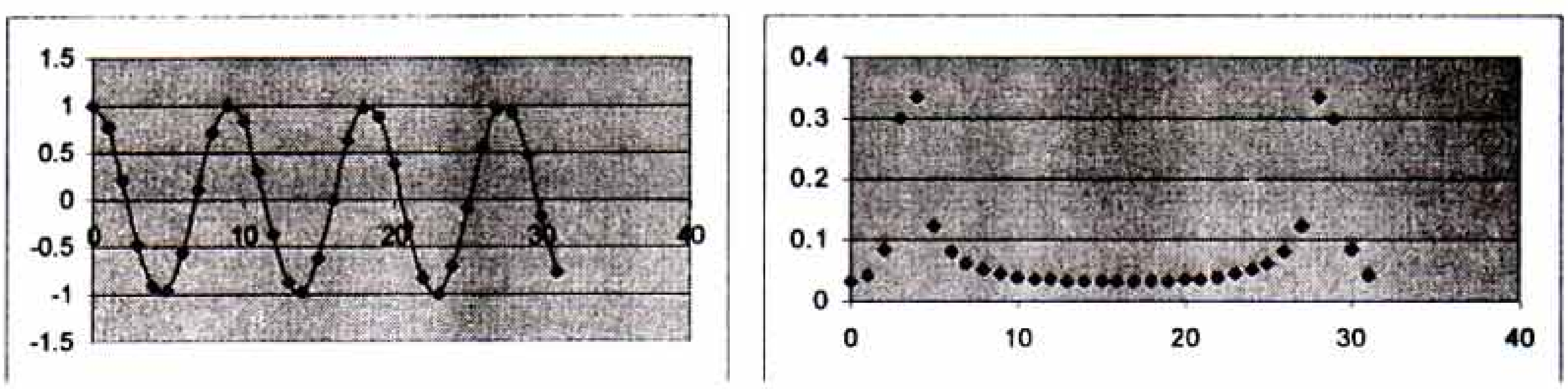
$$x(k) = \cos(2\pi n k) \quad (46)$$

dengan k sesuai dengan waktu t dan n sesuai dengan frekuensi f. Dalam perhitungan diambil N = 32, interval waktu T = 1, dan frekuensi f = 1/8 seperti tertera pada Gambar 1a.



Gambar 1a. x(k) = cos (2π n k)   Gambar 1b. X(n),

Transformasi Fourier dari x(k) ini adalah X(n) yang tertera pada Gambar 1b. Kurva sinambung pada gambar menunjukkan fungsi yang kontinu, sedangkan titik-titik menunjukkan fungsi yang diskrit yang diambil untuk perhitungan. Dari hasilnya yang tertera pada Gambar 1b, tidak ada perbedaan yang berarti antara yang kontinu dengan yang diskrit. Ini disebabkan karena pemilihan interval dan frekuensinya sangat sesuai.



Gambar 2a. x(k), dengan f=1/9.143 Gambar 2b. X(n), transformasi Fourier dari x(k).

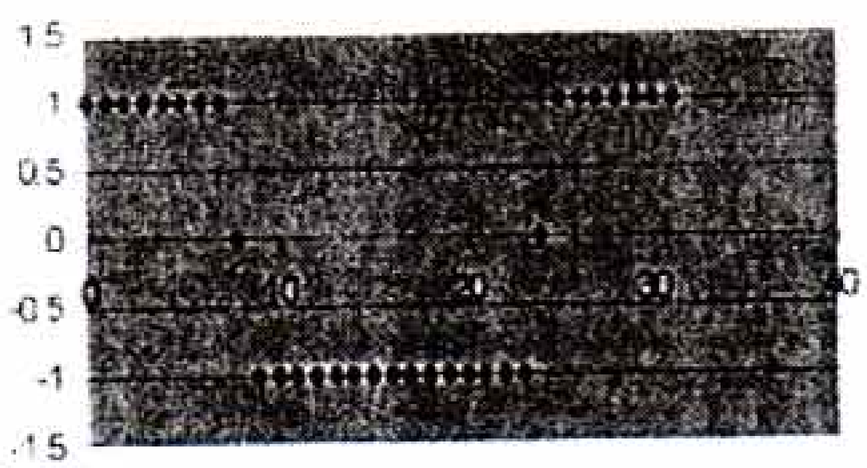
 ISSN 1411 - 3481

Pada Gambar 2a bila frekuensinya diambil f = 1/9.143 dengan interval T yang sama, hasil transformasi Fourier yang didapat pada Gambar 2b ternyata agak berbeda dengan fungsi kontinu pada Gambar 1b. Jadi terlihat di sini bahwa dalam penggunaan transformasi Fourier yang diskrit supaya hasilnya sama dengan transformasi Fourier yang kontinu kita harus berhati-hati dalam pemilihan parameternya. Pada umumnya pemilihan interval yang makin kecil dapat memberikan kesamaan yang lebih baik.

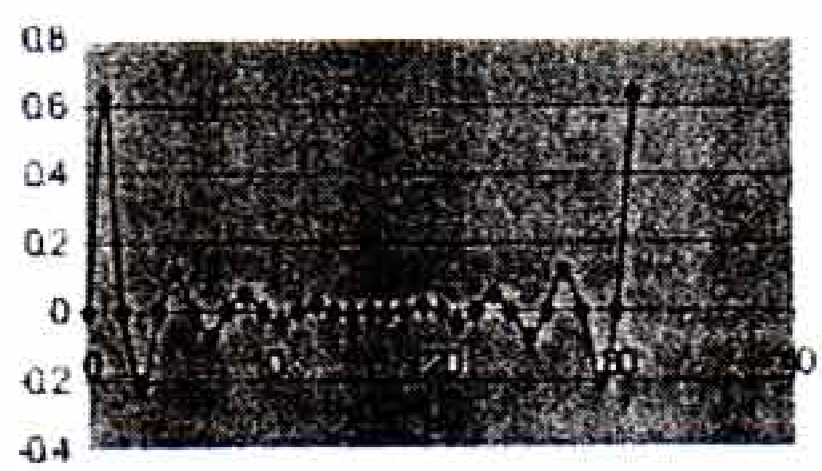
Gambar 3a menunjukkan data x(k) yang diskrit, dengan transformasi Fourier bagian nyata tertera pada Gambar 3b, sedangkan Gambar 3c menunjukkan transformasi totalnya

$$X(n) = \sqrt{[\mathrm{Re}\ X(n)]^2 + [\mathrm{Im}\ X(n)]^2} \qquad (47)$$

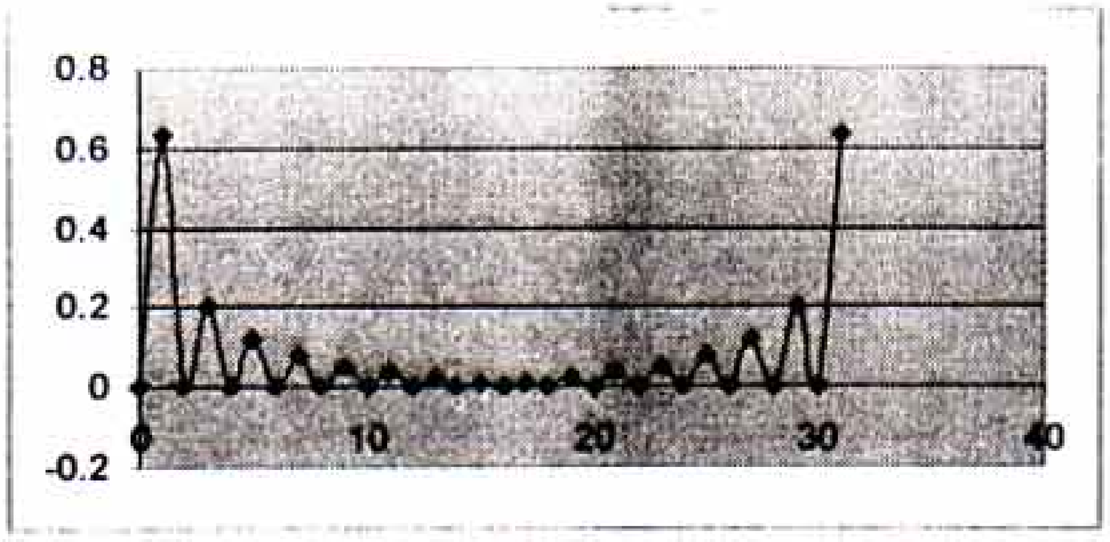
dengan Re menunjukkan bagian nyata dan Im menunjukkan bagian khayal dari X(n).



Gambar 3a. Fungsi diskrit x(k)



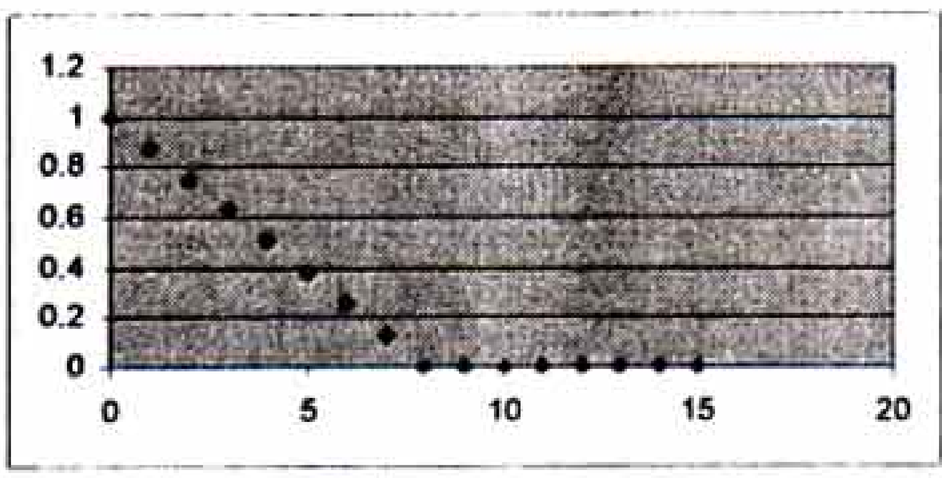
Gambar 3b. X(n) bagian nyata



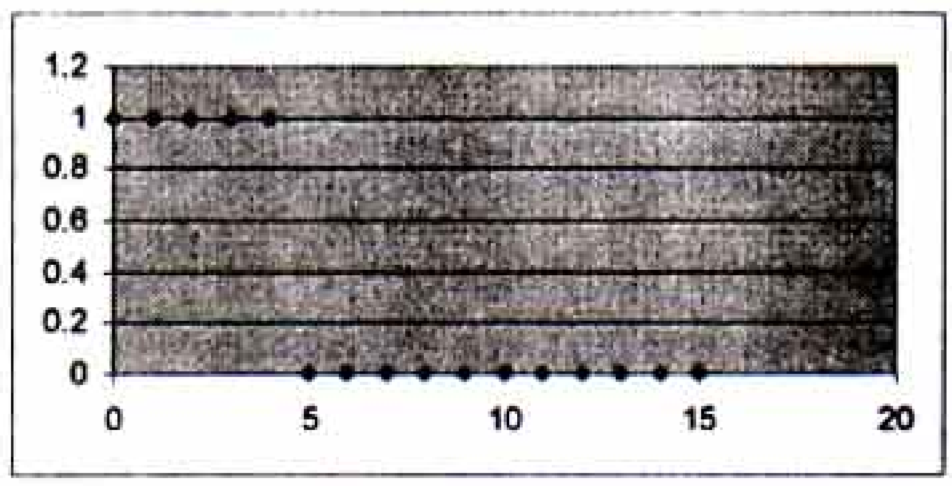
Kurva sinambung hanya dipakai untuk memperjelas penglihatan.

Gambat 3c. X(n), transf. Fourier dari x(k)

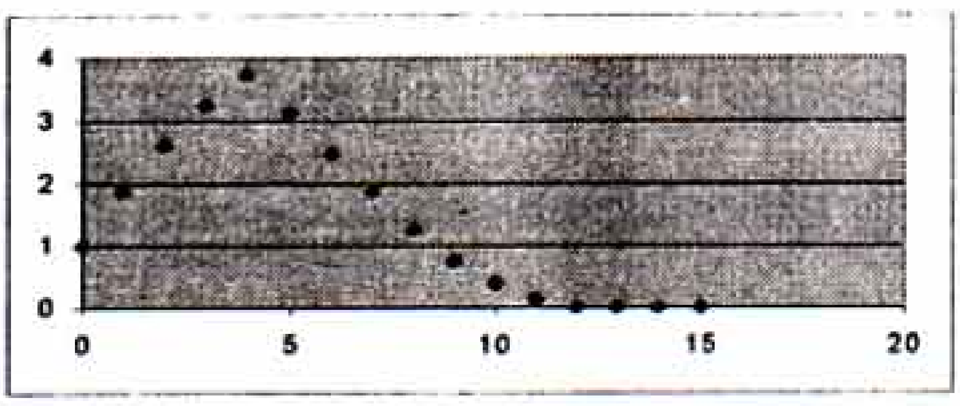
Sebagai contoh perhitungan fungsi konvolusi dari suatu sinyal atau data masukan x(k) dan respon alat h(k) dengan hasil keluaran yang berbentuk fungsi konvolusi y(k), masing-masing tertera pada Gambar-gambar 4a, 4b, dan 4c.



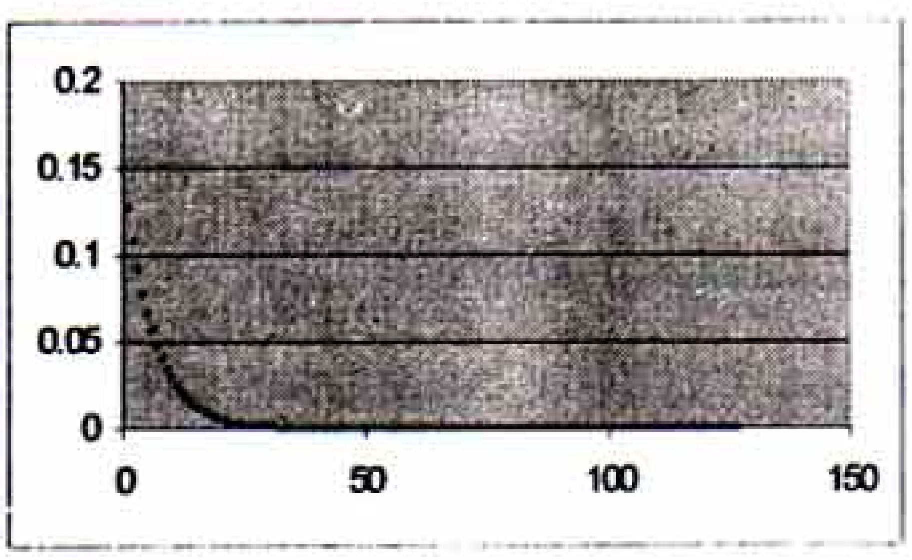
Gambar 4a. Fungsi diskrit x (k)



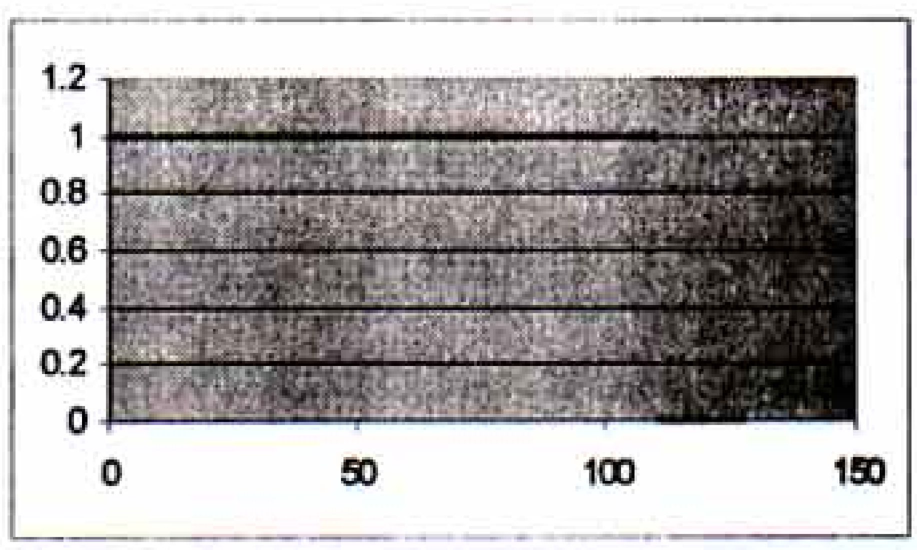
Gambar 4b. Fungsi respons h (k)



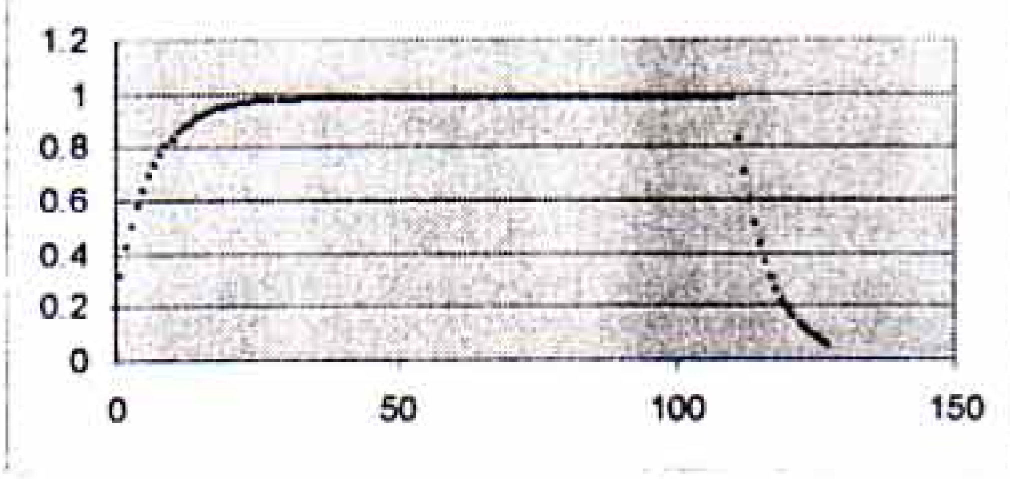
Gambar 4c. Fungsi konvolusi y (k)



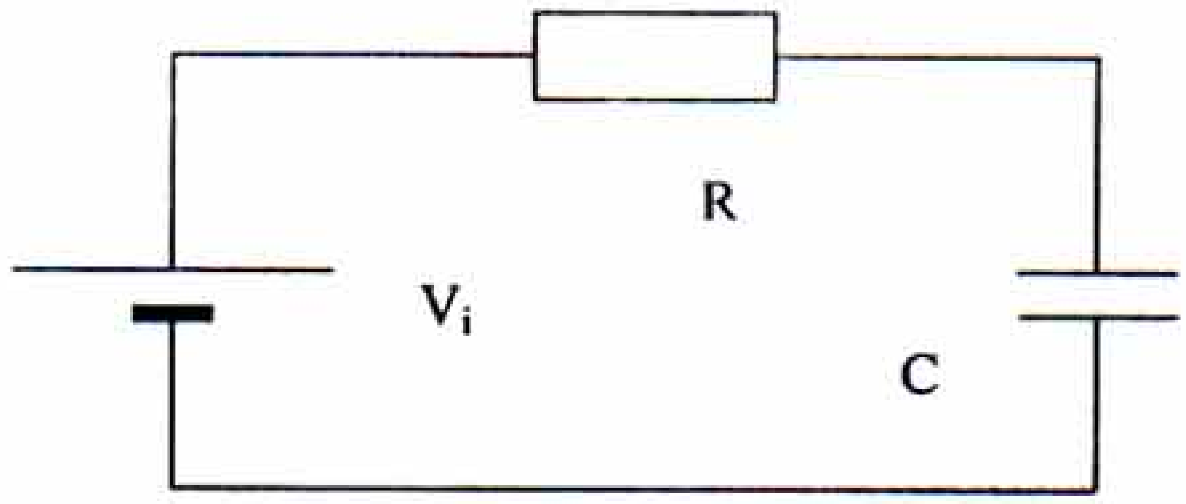
Gambar 5b. Fungsi x(k)



Gambar 5b. Fungsi respon h(k)



Gambar 5c. Fungsi konvolusi y(k)



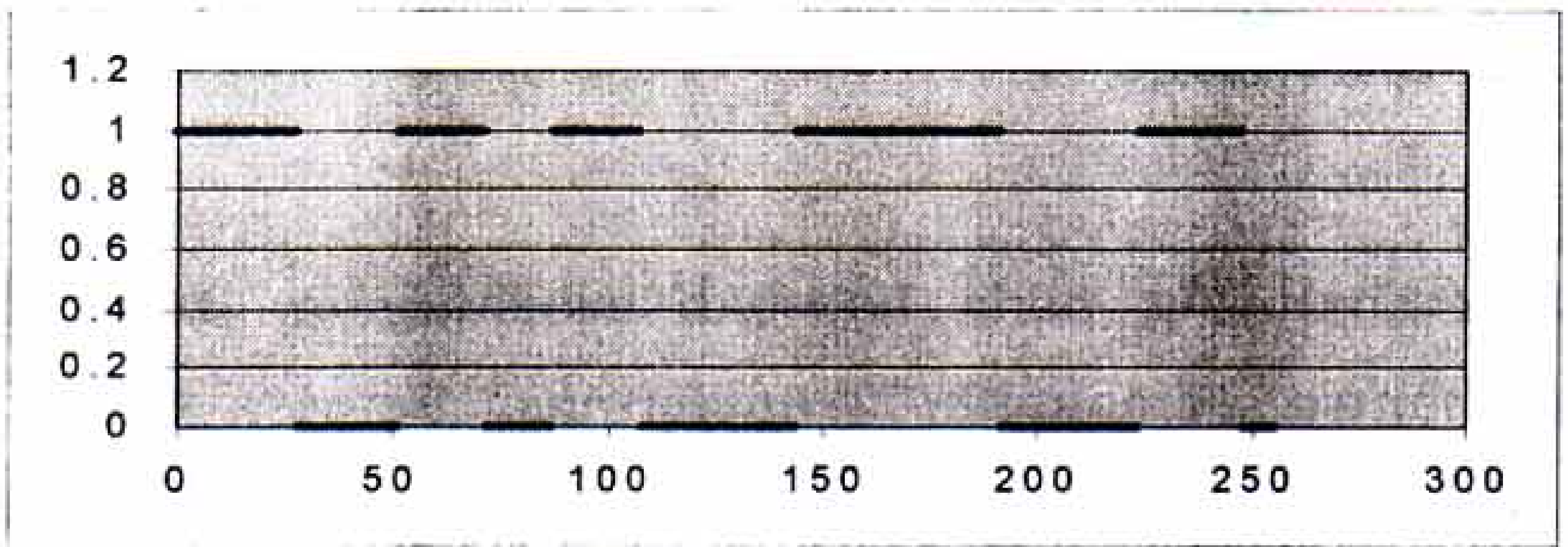
Gambar 5d. Filter RC

Gambar-gambar 5a, 5b, dan 5c, adalah contoh perhitungan fungsi konvolusi yang analog dengan suatu rangkaian filter elektronik RC yang digandeng dengan suatu sumber tegangan v_i (Gambar 5d), di mana x(k) analog dengan masukan v_i , fungsi respon h(k) analog dengan rangkaian filter RC yang berbentuk

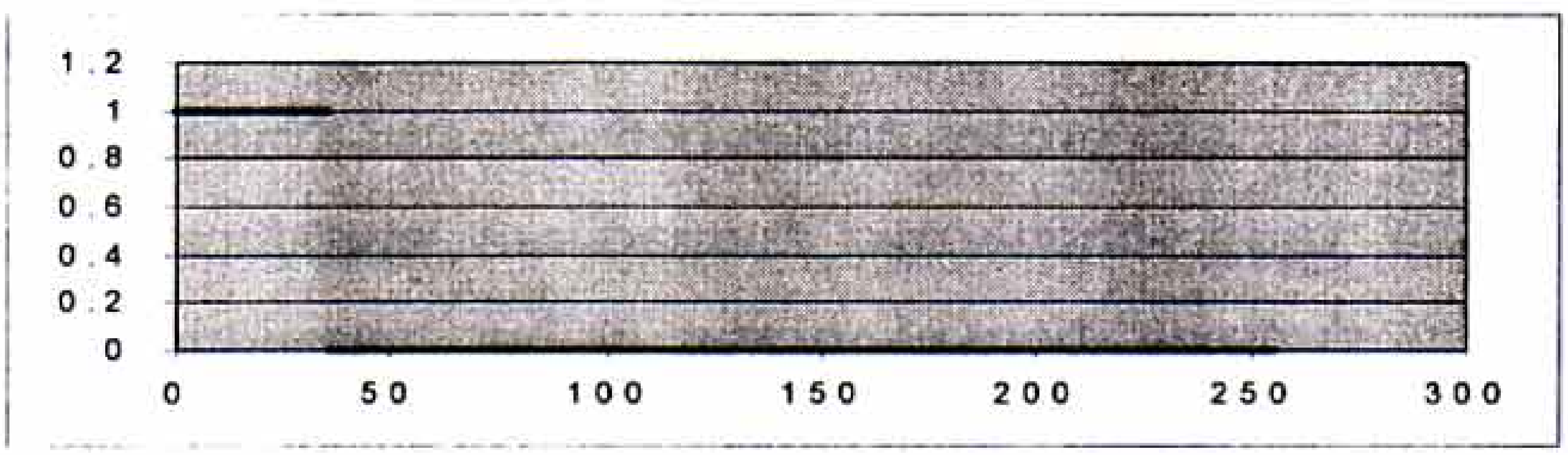
$$\frac{1}{RC} e^{-k/RC} \qquad (48)$$

dengan R hambatan resistor, dan C kapasitas kondensator. Fungsi konvolusi yang didapat mempunyai bentuk seperti potensial v_o atau banyaknya muatan q yang berkembang di dalam kondensator C.

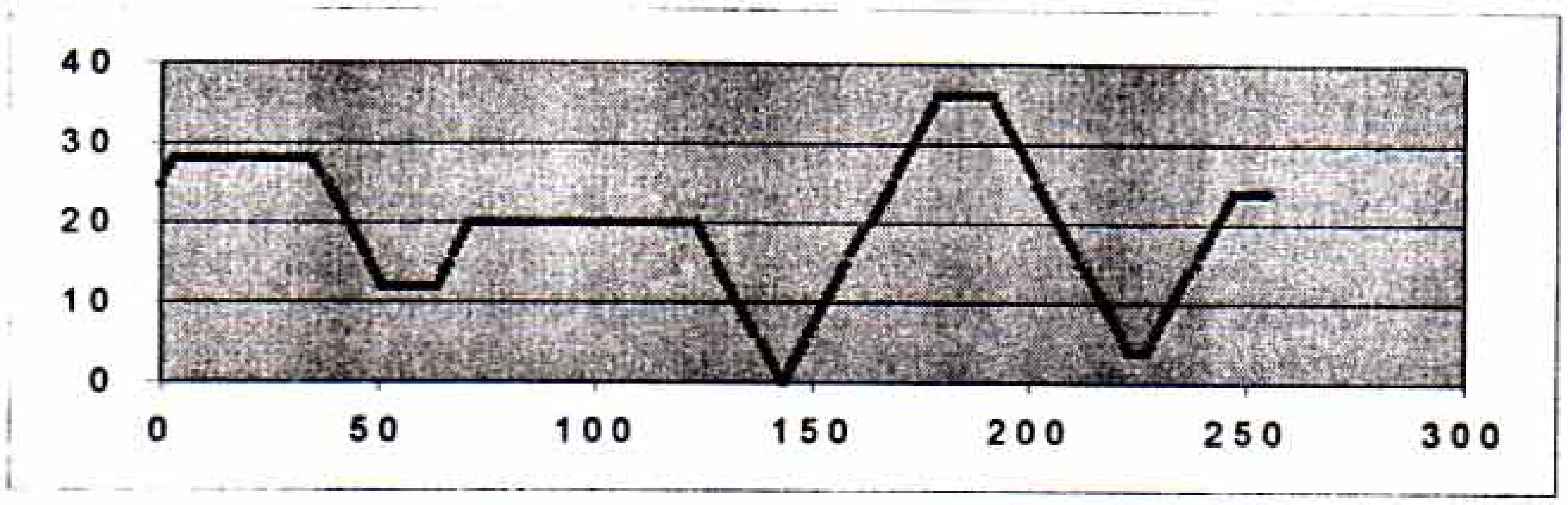
Sebagai contoh terakhir perhitungan fungsi konvolusi adalah fungsi masukan x(k) yang non periodik dengan respon h(k), menghasilkan fungsi konvolusi y(k), yang masing-masing ditunjukkan oleh Gambar-gambar 6a, 6b, dan 6c. Untuk data atau sinyal-sinyal yang terus menerus dan tidak periodik, bilamana memori komputer tidak mampu untuk menampung, maka perhitungan dapat dilakukan dengan cara memberikan suatu harga N tertentu untuk x(k) dan h(k) pada selang tertentu, kemudian dihitung fungsi konvolusinya untuk masing-masing periode N, yang selanjutnya semua hasil perhitungan dirangkaikan menjadi satu dengan cara tertentu untuk menghindari adanya efek pinggir (end effect). Program komputer yang telah disusun untuk perhitungan telah pula dilengkapi dengan perhitungan untuk sinyal-sinyal yang terus menerus ini dengan membagi data dalam siklus-siklus sebesar N data menggunakan metode pilih-simpan (select-savings method) [2,6] dengan hasil yang sama dengan bila seluruh data dianalisis sekaligus, kecuali pada bagian pinggir (depan) sebanyak fungsi responnya, yang dalam hal contoh kita adalah sebanyak 36 titik data.



Gambar 6a. Fungsi x (k)



Gambar 6b. Fungsi respon h (k)



Gambar 6c. Fungsi konvolusi y (k)

Karena perhitungan untuk fungsi korelasi caranya identik dengan perhitungan untuk fungsi konvolusi, maka dalam makalah ini hasilnya tidak disertakan.

KESIMPULAN

Dari pembahasan pada bab-bab sebelumnya, dapat diambil kesimpulan bahwa pemakaian Transformasi Fourier Cepat dapat dilakukan baik untuk sinyal-sinyal yang periodik maupun non-periodik. Fungsi konvolusi dan korelasi dapat pula dihitung dengan menggunakan transformasi ini dengan lebih mudah dan sederhana serta cepat. Kecepatan proses dalam penggunaan Transformasi Fourier Cepat inilah yang sebenarnya menjadikan transformasi ini sangat menarik dan diminati banyak orang dalam pemakaiannya. Dengan perkembangan perangkat keras maupun perangkat lunak komputer digit, serta perkembangan metodologi perhitungan, maka pemakaian Transformasi Fourier Cepat akan mempunyai aplikasi yang semakin luas dalam masa-masa yang akan datang.