

STUDI KARAKTERISTIK FEROMAGNETIK MODEL HEISENBERG SPIN $\frac{1}{2}$ 1D MENGGUNAKAN ANSATZ BETHE I

L. Rohman¹, A. Arkundato¹, I. Sugihartono² dan B. Kurniawan²

¹Jurusan Fisika FMIPA UNEJ

Jl. Kalimantan III/24 Jember 68121

²Departemen Fisika FMIPA UI

Kampus Universitas Indonesia, Depok 16424

ABSTRAK

STUDI KARAKTERISTIK FEROMAGNETIK MODEL HEISENBERG SPIN $\frac{1}{2}$ 1D MENGGUNAKAN ANSATZ BETHE I. Secara teoritik studi tentang spin $\frac{1}{2}$ Feromagnetik model Heisenberg telah diamati dengan menggunakan Ansatz Bethe I. Pada dasarnya kami mencoba memprediksi secara kuantitatif dinamika dari dua spin yang bertetangga. Di sini kami melihat karakteristik dari energi dispersi dari dua magnon dalam keadaan terikat.

Kata kunci : Feromagnetik, ansatz bethe I, interaksi spin, magnon

ABSTRACT

STUDY ON FERROMAGNETIC CHARACTERISTIC HEISENBERG MODEL SPIN $\frac{1}{2}$ 1D BY EMPLOYING THE BETHE ANSATZ I. The theoretical study of ferromagnetism has been investigated based on the Heisenberg Model Spin $\frac{1}{2}$ 1D by employing the Bethe ansatz I. Basically, we try to predict the quantitative dynamics of two nearest-neighboring spins. We want to see the characteristic of dispersion energy of two magnons in the bound state.

Key words : Ferromagnetic, bethe ansatz I, spin interaction, magnon

PENDAHULUAN

Setelah formulasi mekanika kuantum dirumuskan oleh Heisenberg dan Dirac [1], maka mulai terbukalah misteri tentang fenomena feromagnetisme. Telah ditemukan bahwa hukum mekanika kuantum menyebabkan adanya interaksi efektif, $J_{ij} S_i \cdot S_j$, antara spin-spin elektron pada atom tetangga (*neighboring*) dengan fungsi gelombang orbital yang tumpang tindih (*overlapping*). Interaksi pertukaran disebabkan oleh kombinasi efek dari gaya tolak *coulomb* dan prinsip *exclusi pauli*. Interaksi *spin* ini dicatat sebagai kunci dari teori mikroskopik dari Feromagnetisme dan beberapa fenomena lain yang berkaitan dengan *spin* elektron.

Metode pengamatan secara eksak nilai *eigen* (*eigenvalue*) dan vektor *eigen* (*eigenvector*) dari model Heisenberg spin $\frac{1}{2}$ satu-dimensi (1D), sebuah array linear elektron dengan interaksi pertukaran yang seragam antara tetangga terdekat (*nearest neighbor*)[2]. Parametrisasi *bethe* dari *eigen* vektor, *Bethe Ansatz*, menjadi penting yang semula belum tergambarkan saat itu. Saat ini beberapa sistem kuantum *many body* yang lain telah diketahui dapat terselesaikan oleh beberapa varian *bethe ansatz*, dan metode itu telah digeneralisasi dan dikembangkan lebih jauh. Tidak seperti simulasi dalam sistem model klasik, kebanyakan pendekatan

komputasi kuantum *many body* sistem menghasilkan sejumlah analitik yang baik. Hasil ini mendekati kebenaran dalam perhitungan *montecarlo*, pendekatan renormalisasi group, metode rekursi, skala besar dari diagonalisasi numerik, dan untuk itu *bethe ansatz* telah digunakan dalam konteks komputasi ini.

Bethe ansatz adalah metode untuk menghitung secara eksak nilai *eigen* dan *eigen* vektor dari nilai yang tertentu tetapi dalam batasan sistem model kuantum *many-body*. Bagaimanapun nilai *eigen* dan vektor *eigen* untuk sistem tertentu dapat diamati dengan sedikit kesalahan dari kemampuan diagonalisasi numerik, *bethe ansatz* memberikan dua hal penting: (i) semua keadaan *eigen* dikarakterisasi oleh satu set bilangan kuantum yang dapat digunakan untuk menunjukkan sifat-sifat fisika khusus; (ii) dalam banyak hal nilai *eigen* dan sifat fisika diturunkan dari keadaan *eigen* yang dievaluasi dalam limit termodinamika.

Dalam makalah ini kami mencoba menggunakan *ansatz bethe I* untuk karakterisasi sebuah model Heisenberg spin $\frac{1}{2}$ feromagnetik, dan menganalisisnya untuk mendapatkan energi dispersi dari *magnon* yang berdekatan.

TEORI

Hamiltonian dari model *Heisenberg* dengan *spin* $S_n = (S_n^x, S_n^y, S_n^z)$ dengan bilangan kuantum $s = 1/2$ pada 1D *lattice* dari N kedudukan dengan kondisi lapisan batas periodik $S_{N+1} = S_1$ diberikan oleh :

$$H = -J \sum_{n=1}^N S_n \cdot S_{n+1} \quad (1)$$

$$= -J \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} (S_n^+ S_{n+1}^- + S_n^- S_{n+1}^+) + S_n^z S_{n+1}^z \right]$$

di mana $S_n^\pm \equiv S_n^x \pm i S_n^y$ adalah operator *spin flip*. H mempunyai dimensi 2^N dalam ruang *hilbert* dengan vektor basis ortogonal $|\sigma_1, \dots, \sigma_N\rangle$, di mana $\sigma_n = \uparrow$ merepresentasikan *spin up* dan $\sigma_n = \downarrow$ adalah *spin down* dalam kedudukan n . Hubungan komutasi *spin* dengan $\hbar = 1$ adalah:

$$[S_n^z, S_n^\pm] = \pm S_n^\pm \delta_{nn'}, \quad [S_n^\pm, S_{n'}^\pm] = 2 S_n^z \delta_{nn'} \quad (2)$$

Secara singkat operator S_n^\pm, S_n^z pada vector $|\sigma_1, \dots, \sigma_N\rangle$, akan menghasilkan nilai pada Tabel 1.

Tabel 1. Hasil Operasi operator S_n^\pm, S_n^z pada vector $|\sigma_1, \dots, \sigma_N\rangle$ dengan $\sigma_n = \uparrow, \downarrow$

	$ \dots \uparrow \dots\rangle$	$ \dots \downarrow \dots\rangle$
S_k^+	0	$ \dots \uparrow \dots\rangle$
S_k^-	$ \dots \downarrow \dots\rangle$	0
S_k^z	$1/2 \dots \uparrow \dots\rangle$	$-1/2 \dots \downarrow \dots\rangle$

Untuk model *Heisenberg*, dua simetri adalah penting untuk penerapan *Bethe Ansatz*. Simetri rotasi disekitar sumbu z dalam ruang *spin*, dipilih sebagai sumbu kuantisasi yang menyebabkan komponen z dari *spin* total adalah kekal: $[H, S_T^z] = 0$. Dengan mengikuti aturan pada Tabel 1, operasi H pada $|\sigma_1, \dots, \sigma_N\rangle$ menghasilkan kombinasi linear dari vektor basis, yang masing-masing

$$S_T^z \equiv \sum_{n=1}^N S_n^z$$

mempunyai jumlah *spin down* sama. Oleh karena itu vektor basis dapat diurutkan menurut bilangan kuantum. $S_T^z \equiv N/2 - r$ dimana r adalah jumlah *spin down*, semua membentuk blok diagonal dari matriks *Hamiltonian*.

Blok dengan $r=0$ (semua *spin* adalah *up*) atau $|F\rangle \equiv |\uparrow \dots \uparrow\rangle$ maka $H|F\rangle = E_0|F\rangle$ dengan $E_0 = -JN/4$. N vector basis dalam sub ruang invarian dengan $r=1$ (satu *spin down*) disimbolkan:

Blok H dengan $r=1$ dan matriks ukuran $N \times N$, dapat didiagonalisasikan dengan menjumlahkan simetri translasinya, invariansi dari H bersesuaian terhadap

$$|n\rangle = S_n^- |F\rangle \quad n = 1, \dots, N \quad (3)$$

translasi diskret oleh beberapa jumlah ruang kisi. Translasi tersebut dapat dikonstruksikan dari vektor:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{ikn} |n\rangle \quad (4)$$

bilangan gelombang $k=2\pi m/N$, $m=0, \dots, N-1$. $|\Psi\rangle$ adalah eigen vektor dari operator translasi dengan eigenvalue e^{ik} . Sedangkan eigenvalue H adalah:

$$E - E_0 = J(1 - \cos k) \quad (5)$$

Vector (4) merepresentasikan eksitasi *magnon*. Terjadi karena *spin* komplet dari *groundstate* ferromagnetik $|F\rangle$ mendapat gangguan secara periodik oleh gelombang *spin* dengan $\lambda=2\pi/k$. *Bethe ansatz* akan menjadi alternatif penting saat translasi basis invarian tidak lengkap dalam membentuk diagonalisasi matriks *Hamiltonian* dalam sub ruang invarian $2 \leq r \leq N/2$ jika dijumlahkan simetrinya dengan persamaan (1).

Untuk $r=1$, sub ruang adalah superposisi dari vektor basis (3):

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^N a(n) |n\rangle \quad (6)$$

$|\Psi\rangle$ menjadi solusi untuk $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ bila $a(n)$ adalah persamaan linear berikut:

$$2[E - E_0]a(n) = J[2a(n) - a(n-1) - a(n+1)] \quad (7)$$

untuk $n=1, 2, \dots, N$ dengan kondisi batas periodik $a(n+N)=a(n)$. Jadi terdapat N solusi independen dari (7) adalah:

$$a(n) = e^{ikn}, \quad k=2\pi m/N \text{ dengan } m=0, 1, \dots, N-1 \quad (8)$$

Jika disubstitusikan persamaan $a(n)$ dalam (6) maka akan terlihat keadaan *magnon* (setelah normalisasi) pada persamaan (4) dengan energi yang didapat pada persamaan (5).

Untuk nilai r yang lebih besar dari 2 atau Bila fungsi keadaan *bethe* dalam bentuk:

$$|\psi\rangle = \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_r \leq N} a(n_1, \dots, n_r) |n_1, \dots, n_r\rangle \quad (9)$$

momentum k_i dan sudut fase θ_j memiliki koefisien:

$$a(n_1, \dots, n_r) = \sum_{P \in S_r} \exp \left(i \sum_{j=1}^r k p_j n_j + \frac{i}{2} \sum_{i < j} \theta_i p_j \right) \quad (10)$$

Penjumlahan $P \in S_r$ adalah melebihi daripada seluruh permutasi $r!$ dari label $\{1, 2, \dots, r\}$. Konsistensi persamaan eigen value $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ menghasilkan koefisien $a(n_1, \dots, n_r)$, yaitu:

$$2[E - E_0]a(n_1, \dots, n_r) = J \sum_{i=1}^r \sum_{l=0 \pm 1} [a(n_1, \dots, n_r) - a(n_1, \dots, n_i + \sigma, \dots, n_r)] \quad (11a)$$

untuk:

$$j+1 > n_j + 1, \quad j = 1, \dots, r$$

dan 11b.

$$[E - E_0] \psi(n_1, \dots, n_r) = J \sum_{i \neq j, \alpha}^r \sum_{\sigma=\pm 1} [a(n_1, \dots, n_r) - a(n_1, \dots, n_i + \sigma, \dots, n_r)] \psi(n_1, \dots, n_i + \sigma, \dots, n_r) - J \sum_{\alpha} [2a(n_1, \dots, n_r) - a(n_1, \dots, n_{j\alpha} - 1, n_{j\alpha+1}, \dots, n_r) - a(n_1, \dots, n_{j\alpha}, n_{j\alpha+1} + 1, \dots, n_r)] \psi(n_1, \dots, n_{j\alpha}, n_{j\alpha+1} + 1, \dots, n_r)$$

untuk:

$$n_{j\alpha+1} = n_{j\alpha} + 1, \quad n_{j+1} > n_j + 1, \quad j \neq j_\alpha$$

Koefisien $a(n_1, \dots, n_r)$ adalah solusi dari persamaan (11) untuk energi

$$E - E_0 = J \sum_{j=1}^r (1 - \cos k_j) \quad (12)$$

Jika persamaan di atas memiliki bentuk seperti persamaan (10) dan memenuhi kondisi:

$$2a(n_1, \dots, n_{j\alpha}, n_{j\alpha+1} + 1, \dots, n_r) = a(n_1, \dots, n_{j\alpha}, n_{j\alpha}, \dots, n_r) + a(n_1, \dots, n_{j\alpha} + 1, n_{j\alpha} + 1, \dots, n_r)$$

Dengan:

$$\alpha = 1, \dots, r$$

Kondisi ini menghubungkan setiap sudut fase θ_{ij} dengan k_j dalam persamaan (9)

$$e^{i\theta_{ij}} = - \frac{e^{i(k_i+k_j)} + 1 - 2e^{ik_i}}{e^{i(k_i+k_j)} + 1 - 2e^{ik_j}} \quad (13)$$

Dalam bentuk real persamaan tersebut dapat ditulis:

$$2 \cot \frac{\theta_{ij}}{2} = \cot \frac{k_i}{2} - \cot \frac{k_j}{2}, \quad i, j = 1, \dots, r \quad (14)$$

Translasi invarian dari (9) mengindikasikan bahwa (10) memenuhi hubungan $a(n_1, \dots, n_r) = a(n_2, \dots, n_r, n_1 + N)$ sehingga:

$$\sum_{j=1}^r k p_j n_j + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \theta_{ij} p_j = \frac{1}{2} \sum_{i < j} \theta'_{ij} p'_j - 2\pi \lambda p'_r \quad (15)$$

$$+ \sum_{j=2}^r k p'_j (j-1) n_j + k p'_r (n_1 + N)$$

Dimana hubungan permutasi sisi sebelah kiri dan kanan adalah $P(i-1) = P_i, i=2, \dots, r; P'r = P_1$. Jika diambil seluruh bagian dari persamaan (15) tanpa melibatkan indeks $P'r = P_1$ yang hilang, maka dapat dihitung r hubungan tambahan antara sudut fase dan momentum:

$$N k_i = 2\pi \lambda_i + \sum_{j \neq i} \theta_{ij}, \quad i = 1, \dots, r \quad (16)$$

di mana:

$$\lambda_i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Langkah terakhir adalah menemukan bilangan kuantum *bethe* ($\lambda_1, \dots, \lambda_r$) yang menghasilkan (*real* atau kompleks) solusi dari persamaan *bethe ansatz* (14) dan

$$k = \frac{2\pi}{N} \sum_{i=1}^r \lambda_i \quad (17)$$

(16) [3]. Setiap solusi memiliki sebuah *eigenvector* (9) dengan energi (12) dan bilangan gelombang:

HASIL DAN PEMBAHASAN

Komplet set dari solusi *bethe ansatz* untuk sistem dengan $N=4, 5$ dan 6 spin dapat dilihat dalam Tabel 2, Tabel 3 dan Tabel 4. Solusi tersebut invarian terhadap sub ruang $r=N/2$ ($S_T^z=0$) untuk N genap atau $r=N-1/2$ ($S_T^z=1/2$) untuk N ganjil. Untuk momenta k_j yang diberikan, sudut fase θ_{ij} dapat ditentukan dari persamaan (13) dan *eigenvector* (9) melalui substitusi k_j, θ_{ij} ke dalam persamaan (10). Dari solusi tersebut dihasilkan *level-level* energi.

Tabel 2. Solusi *bethe ansatz* untuk $N=4, r=2$

S_T	$\lambda_1 \lambda_2$	$2k/\pi$	k_1	k_2	$E-E_0$
2	0 0	0	0	0	0
1	0 1	1	0	$\pi/2$	1
1	0 2	2	0	π	2
1	0 3	3	0	$3\pi/2$	1
0	1 3	0	$2\pi/3$	$4\pi/3$	3
0	1 1	2	$\pi/2 + i\infty$	$\pi/2 - i\infty$	1

Tabel 3. Solusi *bethe ansatz* untuk $N=5, r=2$

S_T	$\lambda_1 \lambda_2$	$5k/2\pi$	k_1	k_2	$E-E_0$
5/2	0 0	0	0	0	0
3/2	0 1	1	0	$2\pi/5$	0.690983
3/2	0 2	2	0	$4\pi/5$	1.809016
3/2	0 3	3	0	$6\pi/5$	1.809016
3/2	0 4	4	0	$8\pi/5$	0.690983
1/2	1 3	4	1.705325	3.321222	3.118033
1/2	1 4	0	$\pi/2$	$3\pi/2$	2
1/2	2 4	1	2.961962	4.577859	3.118033
1/2	1 1	2	$2\pi/5 + i.198913$	$2\pi/5 - i.198913$	0.881966
1/2	4 4	3	$8\pi/5 + i.198913$	$8\pi/5 - i.198913$	0.881966

Dalam *level-level* energi dari hasil perhitungan di atas terlihat adanya degenerasi, contohnya terlihat saat satu atau lebih bilangan kuantum *bethe* bernilai 0.

Beberapa *eigen* vektor pada beberapa *level* yang sama S_T multiplet mempunyai nilai r yang berbeda, hal ini disebabkan karena perbedaan S_T^z . Semua solusi *bethe ansatz* berlaku untuk $r < N/2$ (bila N genap) dan $r < (N-1)/2$ (bila N ganjil).

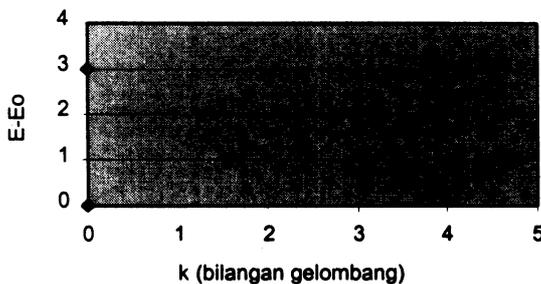
Untuk N yang besar, klasifikasi solusi *bethe ansatz* menjadi banyak dan rumit, hal ini karena terjadi peningkatan r sampai $N/2$. Namun kebanyakan model ini bertujuan mencari solusi dari suatu sistem yang

Tabel 4. Solusi *bethe ansatz* untuk N=6, r=3

S _r	λ ₁ , λ ₂ , λ ₃	3k/π	k ₁	k ₂	k ₃	E-E ₀
3	000	0	0	0	0	0
2	001	1	0	0	π/3	1/2
2	002	2	0	0	2π/3	3/2
2	003	3	0	0	π	2
2	004	4	0	0	4π/3	3/2
2	005	5	0	0	5π/3	1/2
1	013	4	0	1.419506	2.769283	2.780775
1	014	5	0	1.340040	3.895947	5/2
1	015	0	0	2π/5	8π/5	1.381966
1	024	0	0	4π/5	6π/5	3.618033
1	025	1	0	2.387237	4.943144	5/2
1	035	2	0	3.513901	4.863679	2.780775
1	011	2	0	π/3+ i0.732857	π/3- i0.732857	0.719223
1	055	4	0	5π/3+ i0.732857	5π/3- i0.732857	0.719223
1	012	3	0	π/2+ i∞	π/2- i∞	1
0	003	3	i1.087070	-i1.087070	π	0.697224
0	114	0	π/2+ i∞	π/2- i∞	π	3
0	115	1	1.338006+ i1.471688	1.338006- i1.471688	4.654369	2
0	155	5	1.628815	4.945179+ i1.471688	4.945179- i1.471688	2
0	135	3	1.722768	π	4.560416	4.302775

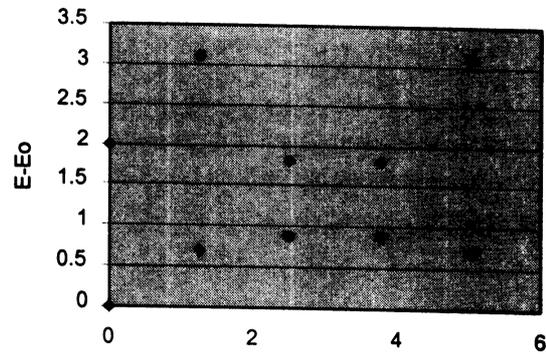
sangat besar ($N \rightarrow \infty$). Hal ini disebabkan dengan solusi yang dihasilkan maka dapat menjelaskan sifat fisika secara khusus (keadaan *groundstate*, energi, kurva magnetisasi, susceptibility magnet, spektrum eksitasi) dari sistem yang dimodelkan.

Dalam perhitungan di atas, solusi untuk $r > 2$ adalah bagian penting dari model *Heisenberg* 1-D Ferromagnetik (dengan nilai $J > 0$, hal ini terlihat dari nilai $E - E_0$ yang positif (> 0)).



Gambar 1. Grafik Plot Energi ($E - E_0$) terhadap bilangan gelombang (k) pada $N=4$, $r=2$

Secara teoritis dapat diduga adanya dua *magnon* yang membentuk keadaan terikat dengan menjelaskan adanya energi ikat. Keadaan ini dapat terlihat saat dua *spin down* yang berjumlah banyak mempunyai kemungkinan besar untuk menempati kedudukan

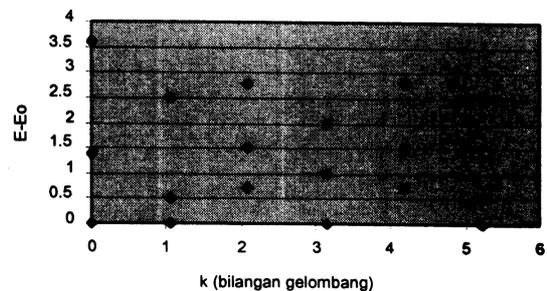


Gambar 2. Grafik Plot Energi ($E - E_0$) terhadap bilangan gelombang (k) pada $N=5$, $r=2$

nearest-neighbor, kemudian mempengaruhi keadaan hamburan dua-*magnon*. Secara fakta, tiga atau lebih *magnon* dapat membentuk ikatan kompleks *spin* dengan energi eksitasi terendah. Secara khusus, untuk sub ruang dengan r *spin down*, dapat ditunjukkan bahwa keadaan eksitasi terendahnya pada bilangan gelombang tertentu k yang direpresentasikan oleh fungsi gelombang dengan momenta kompleks sebagai berikut:

$$\cot \frac{k_j}{2} = r \cot \frac{k}{2} - i(r - 2j + 1) + O(e^{-\delta_j N}) \quad (18)$$

dengan $\delta_j > 0, j=1, \dots, r$.



Gambar 3. Grafik Plot Energi ($E - E_0$) terhadap bilangan gelombang pada $N=6$, $r=3$

Dispersi dari hasil keadaan terikat lainnya dengan $r \leq N/2$ adalah:

$$E - E_0 = J(1 - \cos k) / r \quad (19)$$

Bilangan kuantum *bethe* dari beberapa keadaan dapat dikarakterisasikan dengan: $|\lambda_i - \lambda_{i+1}| = 0, 1$ untuk setiap pasangan kompleks konjugat momenta: $k_{i+1} = k_i^*$ dalam persamaan (18).

KESIMPULAN

Model *Heisenberg* Ferromagnetik 1-D dengan *spin-1/2* dapat dianalisis lebih lanjut dengan metode *bethe ansatz I*. Hasil yang di dapat menunjukkan bahwa $J > 0$ untuk bilangan $r > 2$ (jumlah *spin down*). Karakteristik dari model $S = 1/2$ ferromagnetik terlihat jelas dari fenomena degenerasi energi yang muncul pada keadaan eksitasi

magnon. Degenerasi dari bahan feromagnetik dalam perhitungan ini dapat terlihat lebih jelas dalam grafik plot antara energi ($E-E_0$) dengan bilangan gelombang. Energi akan selalu positif nilainya, terutama bila N bernilai besar dengan $r > 2$. Besar energi dispersi dari hasil keadaan terikat dengan $r \leq N/2$ dan N yang besar ($r > 2$) adalah:

$$E - E_0 = J(1 - \cos k)/r$$

DAFTAR ACUAN

- [1]. W. HEISSENBERG, *Z. Phys.* **38**, (1926), 441 ; P. DIRAC, *Proc. Roy. Soc.* **112 A**, (1926), 661.
- [2]. H. BETHE, *Z. Phys.*, **71**, (1931), 205.
- [3]. M. KARBACH, KUN HU, GERHARD MULLER, *Cond-mat/9809163 V1* (1998).
- [4]. G. H. COLUB AND C. F. VAN LOAN, *Matrix Computations* (John Hopkins, Baltimore, 1993).
- [5]. W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETERLING, AND B. FLANNER, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge (1992).
- [6]. GREINER, W., *Introduction to Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, (1995).