

STUDI KARAKTERISTIK FEROMAGNETIK MODEL HEISENBERG SPIN $\frac{1}{2}$ 1D MENGGUNAKAN ANSATZ BETHE I

L. Rohman¹, A. Arkundato¹, I. Sugihartono² dan B. Kurniawan²

¹Jurusan Fisika FMIPA UNEJ

Jl. Kalimantan III/24 Jember 68121

²Departemen Fisika FMIPA UI

Kampus Universitas Indonesia, Depok 16424

ABSTRAK

STUDI KARAKTERISTIK FEROMAGNETIK MODEL HEISENBERG SPIN $\frac{1}{2}$ 1D MENGGUNAKAN ANSATZ BETHE I. Secara teoritik studi tentang spin $\frac{1}{2}$ Feromagnetik model *Heisenberg* telah diamati dengan menggunakan *Ansatz Bethe I*. Pada dasarnya kami mencoba memprediksi secara kuantitatif dinamika dari dua spin yang bertetangga. Di sini kami melihat karakteristik dari energi dispersi dari dua magnon dalam keadaan terikat.

Kata kunci : Feromagnetik, *ansatz bethe I*, interaksi spin, *magnon*

ABSTRACT

STUDY ON FERROMAGNETIC CHARACTERISTIC HEISENBERG MODEL SPIN $\frac{1}{2}$ 1D BY EMPLOYING THE BETHE ANSATZ I. The theoretical study of ferromagnetism has been investigated based on the Heisenberg Model Spin $\frac{1}{2}$ 1D by employing the Bethe ansatz I. Basically, we try to predict the quantitative dynamics of two nearest-neighboring spins. We want to see the characteristic of dispersion energy of two magnons in the bound state.

Key words : Ferromagnetic, *bethe ansatz I*, spin interaction, *magnon*

PENDAHULUAN

Setelah formulasi mekanika kuantum dirumuskan oleh *Heisenberg* dan *Dirac* [1], maka mulai terbukalah misteri tentang fenomena feromagnetisme. Telah ditemukan bahwa hukum mekanika kuantum menyebabkan adanya interaksi efektif, $J_{ij} S_i \cdot S_j$, antara *spin-spin* elektron pada atom tetangga (*neighboring*) dengan fungsi gelombang orbital yang tumpang tindih (*overlapping*). Interaksi pertukaran disebabkan oleh kombinasi efek dari gaya tolak *coulomb* dan prinsip *exclusi pauli*. Interaksi *spin* ini dicatat sebagai kunci dari teori mikroskopik dari Feromagnetisme dan beberapa fenomena lain yang berkaitan dengan *spin* elektron.

Metode pengamatan secara eksak nilai *eigen* (*eigenvalue*) dan vektor *eigen* (*eigenvector*) dari model *Heisenberg spin $\frac{1}{2}$ satu-dimensi (1D)*, sebuah array linear elektron dengan interaksi pertukaran yang seragam antara tetangga terdekat (*nearest neighbor*)[2]. Parametrisasi *bethe* dari *eigen* vektor, *Bethe Ansatz*, menjadi penting yang semula belum tergambarkan saat itu. Saat ini beberapa sistem kuantum *many body* yang lain telah diketahui dapat terselesaikan oleh beberapa varian *bethe ansatz*, dan metode itu telah digeneralisasi dan dikembangkan lebih jauh. Tidak seperti simulasi dalam sistem model klasik, kebanyakan pendekatan

komputasi kuantum *many body* sistem menghasilkan sejumlah analitik yang baik. Hasil ini mendekati kebenaran dalam perhitungan *montecarlo*, pendekatan renormalisasi group, metode rekursi, skala besar dari diagonalisasi numerik, dan untuk itu *bethe ansatz* telah digunakan dalam konteks komputasi ini.

Bethe ansatz adalah metode untuk menghitung secara eksak nilai *eigen* dan *eigen* vektor dari nilai yang tertentu tetapi dalam batasan sistem model kuantum *many-body*. Bagaimanapun nilai *eigen* dan vektor *eigen* untuk sistem tertentu dapat diamati dengan sedikit kesalahan dari kemampuan diagonalisasi numerik, *bethe ansatz* memberikan dua hal penting: (i) semua keadaan *eigen* dikarakterisasi oleh satu set bilangan kuantum yang dapat digunakan untuk menunjukkan sifat-sifat fisika khusus; (ii) dalam banyak hal nilai *eigen* dan sifat fisika diturunkan dari keadaan *eigen* yang dievaluasi dalam limit termodinamika.

Dalam makalah ini kami mencoba menggunakan *ansatz bethe I* untuk karakterisasi sebuah model *Heisenberg spin $\frac{1}{2}$ feromagnetik*, dan menganalisisnya untuk mendapatkan energi dispersi dari *magnon* yang berdekatan.

TEORI

Hamiltonian dari model *Heisenberg* dengan *spin* $S_n = (S_n^x, S_n^y, S_n^z)$ dengan bilangan kuantum $s = 1/2$ pada 1D *lattice* dari N kedudukan dengan kondisi lapisan batas periodik $S_{N+1} = S_1$ diberikan oleh :

$$H = -J \sum_{n=1}^N S_n \cdot S_{n+1} \quad (1)$$

$$= -J \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} (S_n^+ S_{n+1}^- + S_n^- S_{n+1}^+) + S_n^z S_{n+1}^z \right]$$

di mana $S_n^\pm \equiv S_n^x \pm i S_n^y$ adalah operator *spin flip*. H mempunyai dimensi 2^N dalam ruang *hilbert* dengan vektor basis ortogonal $|\sigma_1, \dots, \sigma_N\rangle$, di mana $\sigma_n = \uparrow$ merepresentasikan *spin up* dan $\sigma_n = \downarrow$ adalah *spin down* dalam kedudukan n . Hubungan komutasi *spin* dengan $\hbar = 1$ adalah:

$$[S_n^z, S_n^\pm] = \pm S_n^\pm \delta_{nn'}, \quad [S_n^+, S_n^-] = 2S_n^z \delta_{nn'} \quad (2)$$

Secara singkat operator S_n^\pm, S_n^z pada vector $|\sigma_1, \dots, \sigma_N\rangle$, akan menghasilkan nilai pada Tabel 1.

Tabel 1. Hasil Operasi operator S_n^\pm, S_n^z pada vector $|\sigma_1, \dots, \sigma_N\rangle$ dengan $\sigma_n = \uparrow, \downarrow$

	$ \dots \uparrow \dots\rangle$	$ \dots \downarrow \dots\rangle$
S_k^+	0	$ \dots \uparrow \dots\rangle$
S_k^-	$ \dots \downarrow \dots\rangle$	0
S_k^z	$1/2 \dots \uparrow \dots\rangle$	$-1/2 \dots \downarrow \dots\rangle$

Untuk model *Heisenberg*, dua simetri adalah penting untuk penerapan *Bethe Ansatz*. Simetri rotasi disekitar sumbu z dalam ruang *spin*, dipilih sebagai sumbu kuantisasi yang menyebabkan komponen z dari *spin* total adalah kekal: $[H, S_T^z] = 0$. Dengan mengikuti aturan pada Tabel 1, operasi H pada $|\sigma_1, \dots, \sigma_N\rangle$ menghasilkan kombinasi linear dari vektor basis, yang masing-masing

$$S_T^z \equiv \sum_{n=1}^N S_n^z$$

memiliki jumlah *spin down* sama. Oleh karena itu vektor basis dapat diurutkan menurut bilangan kuantum. $S_T^z \equiv N/2 - r$ dimana r adalah jumlah *spin down*, semua membentuk blok diagonal dari matriks *Hamiltonian*.

Blok dengan $r=0$ (semua *spin* adalah *up*) atau $|F\rangle \equiv |\uparrow \dots \uparrow\rangle$ maka $H|F\rangle = E_0|F\rangle$ dengan $E_0 = -JN/4$. N vector basis dalam sub ruang invarian dengan $r=1$ (satu *spin down*) disimbolkan:

Blok H dengan $r=1$ dan matriks ukuran $N \times N$, dapat didiagonalisasikan dengan menjumlahkan simetri translasinya, invariansi dari H bersesuaian terhadap

$$|n\rangle = S_n^- |F\rangle \quad n = 1, \dots, N \quad (3)$$

translasi diskret oleh beberapa jumlah ruang kisi. Translasi tersebut dapat dikonstruksikan dari vektor:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{ikn} |n\rangle \quad (4)$$

bilangan gelombang $k=2\pi m/N$, $m=0, \dots, N-1$. $|\Psi\rangle$ adalah eigen vektor dari operator translasi dengan eigenvalue e^{ik} . Sedangkan eigenvalue H adalah:

$$E - E_0 = J(1 - \cos k) \quad (5)$$

Vector (4) merepresentasikan eksitasi *magnon*. Terjadi karena *spin* komplet dari *groundstate* ferromagnetik $|F\rangle$ mendapat gangguan secara periodik oleh gelombang *spin* dengan $\lambda=2\pi/k$. *Bethe ansatz* akan menjadi alternatif penting saat translasi basis invarian tidak lengkap dalam membentuk diagonalisasi matriks *Hamiltonian* dalam sub ruang invarian $2 \leq r \leq N/2$ jika dijumlahkan simetrinya dengan persamaan (1).

Untuk $r=1$, sub ruang adalah superposisi dari vektor basis (3):

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^N a(n) |n\rangle \quad (6)$$

$|\Psi\rangle$ menjadi solusi untuk $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ bila $a(n)$ adalah persamaan linear berikut:

$$2[E - E_0]a(n) = J[2a(n) - a(n-1) - a(n+1)] \quad (7)$$

untuk $n=1, 2, \dots, N$ dengan kondisi batas periodik $a(n+N)=a(n)$. Jadi terdapat N solusi independen dari (7) adalah:

$$a(n) = e^{ikn}, \quad k=2\pi m/N \text{ dengan } m=0, 1, \dots, N-1 \quad (8)$$

Jika disubstitusikan persamaan $a(n)$ dalam (6) maka akan terlihat keadaan *magnon* (setelah normalisasi) pada persamaan (4) dengan energi yang didapat pada persamaan (5).

Untuk nilai r yang lebih besar dari 2 atau Bila fungsi keadaan *bethe* dalam bentuk:

$$|\psi\rangle = \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_r \leq N} a(n_1, \dots, n_r) |n_1, \dots, n_r\rangle \quad (9)$$

momentum k_i dan sudut fase θ_j memiliki koefisien:

$$a(n_1, \dots, n_r) = \sum_{P \in S_r} \exp \left(i \sum_{j=1}^r k p_j n_j + \frac{i}{2} \sum_{i < j} \theta p_i p_j \right) \quad (10)$$

Penjumlahan $P \in S_r$ adalah melebihi daripada seluruh permutasi $r!$ dari label $\{1, 2, \dots, r\}$. Konsistensi persamaan eigen value $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ menghasilkan koefisien $a(n_1, \dots, n_r)$, yaitu:

$$2[E - E_0]a(n_1, \dots, n_r) = J \sum_{i=1}^r \sum_{l=0 \pm 1} [a(n_1, \dots, n_r) - a(n_1, \dots, n_i + \sigma, \dots, n_r)] \quad (11a)$$

untuk:

$$j+1 > n_j + 1, \quad j = 1, \dots, r$$

dan 11b.

$$[E - E_0] \psi(n_1, \dots, n_r) = J \sum_{i \neq j, \alpha}^r \sum_{\sigma=\pm 1} [a(n_1, \dots, n_r) - a(n_1, \dots, n_i + \sigma, \dots, n_r)] \psi(n_1, \dots, n_i - \sigma, \dots, n_r) + J \sum_{\alpha} [2a(n_1, \dots, n_r) - a(n_1, \dots, n_{j\alpha-1}, \dots, n_r) - a(n_1, \dots, n_{j\alpha+1}, \dots, n_r)] \psi(n_1, \dots, n_{j\alpha-1}, \dots, n_{j\alpha+1}, \dots, n_r)$$

untuk:

$$n_{j\alpha+1} = n_{j\alpha} + 1, \quad n_{j+1} > n_j + 1, \quad j \neq j_\alpha$$

Koefisien $a(n_1, \dots, n_r)$ adalah solusi dari persamaan (11) untuk energi

$$E - E_0 = J \sum_{j=1}^r (1 - \cos k_j) \quad (12)$$

Jika persamaan di atas memiliki bentuk seperti persamaan (10) dan memenuhi kondisi:

$$2a(n_1, \dots, n_{j\alpha}, n_{j\alpha+1} + 1, \dots, n_r) = a(n_1, \dots, n_{j\alpha}, n_{j\alpha}, \dots, n_r) + a(n_1, \dots, n_{j\alpha} + 1, n_{j\alpha} + 1, \dots, n_r)$$

Dengan:

$$\alpha = 1, \dots, r$$

Kondisi ini menghubungkan setiap sudut fase θ_{ij} dengan k_j dalam persamaan (9)

$$e^{i\theta_{ij}} = - \frac{e^{i(k_i+k_j)} + 1 - 2e^{ik_i}}{e^{i(k_i+k_j)} + 1 - 2e^{ik_j}} \quad (13)$$

Dalam bentuk real persamaan tersebut dapat ditulis:

$$2 \cot \frac{\theta_{ij}}{2} = \cot \frac{k_i}{2} - \cot \frac{k_j}{2}, \quad i, j = 1, \dots, r \quad (14)$$

Translasi invarian dari (9) mengindikasikan bahwa (10) memenuhi hubungan $a(n_1, \dots, n_r) = a(n_2, \dots, n_r, n_1 + N)$ sehingga:

$$\sum_{j=1}^r k p_j n_j + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \theta_{ij} p_j = \frac{1}{2} \sum_{i < j} \theta_{ij} p_i + p'_j - 2\pi \lambda p'_r \quad (15)$$

$$+ \sum_{j=2}^r k p'_j (j-1) n_j + k p'_r (n_1 + N)$$

Dimana hubungan permutasi sisi sebelah kiri dan kanan adalah $P(i-1) = P_i, i=2, \dots, r; P'r = P_1$. Jika diambil seluruh bagian dari persamaan (15) tanpa melibatkan indeks $P'r = P_1$ yang hilang, maka dapat dihitung r hubungan tambahan antara sudut fase dan momentum:

$$N k_i = 2\pi \lambda_i + \sum_{j \neq i} \theta_{ij}, \quad i = 1, \dots, r \quad (16)$$

di mana:

$$\lambda_i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Langkah terakhir adalah menemukan bilangan kuantum *bethe* ($\lambda_1, \dots, \lambda_r$) yang menghasilkan (*real* atau kompleks) solusi dari persamaan *bethe ansatz* (14) dan

$$k = \frac{2\pi}{N} \sum_{i=1}^r \lambda_i \quad (17)$$

(16) [3]. Setiap solusi memiliki sebuah *eigenvector* (9) dengan energi (12) dan bilangan gelombang:

HASIL DAN PEMBAHASAN

Komplet set dari solusi *bethe ansatz* untuk sistem dengan $N=4, 5$ dan 6 spin dapat dilihat dalam Tabel 2, Tabel 3 dan Tabel 4. Solusi tersebut invarian terhadap sub ruang $r=N/2$ ($S_T^z=0$) untuk N genap atau $r=N-1/2$ ($S_T^z=1/2$) untuk N ganjil. Untuk momenta k_j yang diberikan, sudut fase θ_{ij} dapat ditentukan dari persamaan (13) dan *eigenvector* (9) melalui substitusi k_j, θ_{ij} ke dalam persamaan (10). Dari solusi tersebut dihasilkan *level-level* energi.

Tabel 2. Solusi *bethe ansatz* untuk $N=4, r=2$

S_T	$\lambda_1 \lambda_2$	$2k/\pi$	k_1	k_2	$E-E_0$
2	0 0	0	0	0	0
1	0 1	1	0	$\pi/2$	1
1	0 2	2	0	π	2
1	0 3	3	0	$3\pi/2$	1
0	1 3	0	$2\pi/3$	$4\pi/3$	3
0	1 1	2	$\pi/2 + i\infty$	$\pi/2 - i\infty$	1

Tabel 3. Solusi *bethe ansatz* untuk $N=5, r=2$

S_T	$\lambda_1 \lambda_2$	$5k/2\pi$	k_1	k_2	$E-E_0$
5/2	0 0	0	0	0	0
3/2	0 1	1	0	$2\pi/5$	0.690983
3/2	0 2	2	0	$4\pi/5$	1.809016
3/2	0 3	3	0	$6\pi/5$	1.809016
3/2	0 4	4	0	$8\pi/5$	0.690983
1/2	1 3	4	1.705325	3.321222	3.118033
1/2	1 4	0	$\pi/2$	$3\pi/2$	2
1/2	2 4	1	2.961962	4.577859	3.118033
1/2	1 1	2	$2\pi/5 + i.198913$	$2\pi/5 - i.198913$	0.881966
1/2	4 4	3	$8\pi/5 + i.198913$	$8\pi/5 - i.198913$	0.881966

Dalam *level-level* energi dari hasil perhitungan di atas terlihat adanya degenerasi, contohnya terlihat saat satu atau lebih bilangan kuantum *bethe* bernilai 0.

Beberapa *eigen* vektor pada beberapa *level* yang sama S_T multiplet mempunyai nilai r yang berbeda, hal ini disebabkan karena perbedaan S_T^z . Semua solusi *bethe ansatz* berlaku untuk $r < N/2$ (bila N genap) dan $r < (N-1)/2$ (bila N ganjil).

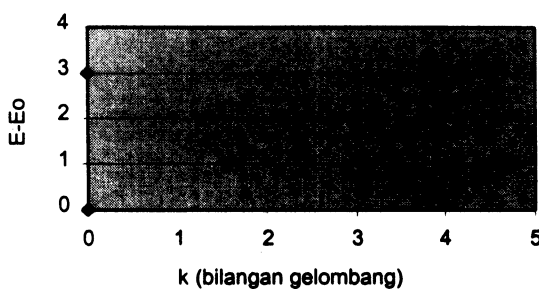
Untuk N yang besar, klasifikasi solusi *bethe ansatz* menjadi banyak dan rumit, hal ini karena terjadi peningkatan r sampai $N/2$. Namun kebanyakan model ini bertujuan mencari solusi dari suatu sistem yang

Tabel 4. Solusi bethe ansatz untuk N=6, r=3

S_T	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	$3k/\pi$	k_1	k_2	k_3	$E-E_0$
3	000	0	0	0	0	0
2	001	1	0	0	$\pi/3$	1/2
2	002	2	0	0	$2\pi/3$	3/2
2	003	3	0	0	π	2
2	004	4	0	0	$4\pi/3$	3/2
2	005	5	0	0	$5\pi/3$	1/2
1	013	4	0	1.419506	2.769283	2.780775
1	014	5	0	1.340040	3.895947	5/2
1	015	0	0	$2\pi/5$	$8\pi/5$	1.381966
1	024	0	0	$4\pi/5$	$6\pi/5$	3.618033
1	025	1	0	2.387237	4.943144	5/2
1	035	2	0	3.513901	4.863679	2.780775
1	011	2	0	$\pi/3 + i0.732857$	$\pi/3 - i0.732857$	0.719223
1	055	4	0	$5\pi/3 + i0.732857$	$5\pi/3 - i0.732857$	0.719223
1	012	3	0	$\pi/2 + i\infty$	$\pi/2 - i\infty$	1
0	003	3	$i1.087070$	$-i1.087070$	π	0.697224
0	114	0	$\pi/2 + i\infty$	$\pi/2 - i\infty$	π	3
0	115	1	$1.338006 + i1.471688$	$1.338006 - i1.471688$	4.654369	2
0	155	5	1.628815	$4.945179 + i1.471688$	$4.945179 - i1.471688$	2
0	135	3	1.722768	π	4.560416	4.302775

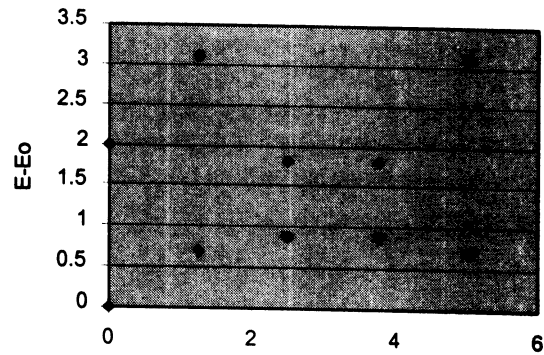
sangat besar ($N \rightarrow \infty$). Hal ini disebabkan dengan solusi yang dihasilkan maka dapat menjelaskan sifat fisika secara khusus (keadaan *groundstate*, energi, kurva magnetisasi, susceptibility magnet, spektrum eksitasi) dari sistem yang dimodelkan.

Dalam perhitungan di atas, solusi untuk $r > 2$ adalah bagian penting dari model Heisenberg 1-D Ferromagnetik (dengan nilai $J > 0$, hal ini terlihat dari nilai $E-E_0$ yang positif (> 0)).



Gambar 1. Grafik Plot Energi ($E-E_0$) terhadap bilangan gelombang (k) pada $N=4, r=2$

Secara teoritis dapat diduga adanya dua *magnon* yang membentuk keadaan terikat dengan menjelaskan adanya energi ikat. Keadaan ini dapat terlihat saat dua *spin down* yang berjumlah banyak mempunyai kemungkinan besar untuk menempati kedudukan

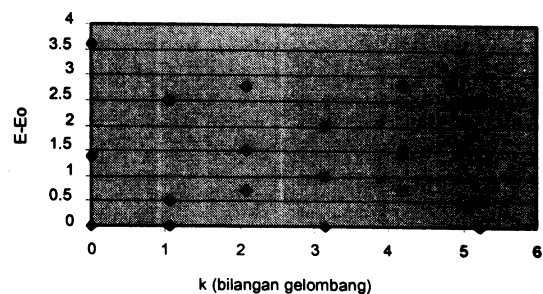


Gambar 2. Grafik Plot Energi ($E-E_0$) terhadap bilangan gelombang (k) pada $N=5, r=2$

nearest-neighbor, kemudian mempengaruhi keadaan hamburan dua-*magnon*. Secara fakta, tiga atau lebih *magnon* dapat membentuk ikatan kompleks *spin* dengan energi eksitasi terendah. Secara khusus, untuk sub ruang dengan r *spin down*, dapat ditunjukkan bahwa keadaan eksitasi terendahnya pada bilangan gelombang tertentu k yang direpresentasikan oleh fungsi gelombang dengan momenta kompleks sebagai berikut:

$$\cot \frac{k_j}{2} = r \cot \frac{k}{2} - i(r - 2j + 1) + O(e^{-\delta_j N}) \quad (18)$$

dengan $\delta_j > 0, j=1, \dots, r$.



Gambar 3. Grafik Plot Energi ($E-E_0$) terhadap bilangan gelombang pada $N=6, r=3$

Dispersi dari hasil keadaan terikat lainnya dengan $r \leq N/2$ adalah:

$$E - E_0 = J(1 - \cos k)/r \quad (19)$$

Bilangan kuantum *bethe* dari beberapa keadaan dapat dikarakterisasikan dengan: $|\lambda_i - \lambda_{i+1}| = 0, 1$ untuk setiap pasangan kompleks konjugat momenta: $k_{i+1} = k_i^*$ dalam persamaan (18).

KESIMPULAN

Model Heisenberg Ferromagnetik 1-D dengan spin- $\frac{1}{2}$ dapat dianalisis lebih lanjut dengan metode *bethe ansatz I*. Hasil yang di dapat menunjukkan bahwa $J > 0$ untuk bilangan $r > 2$ (jumlah *spin down*). Karakteristik dari model $S \frac{1}{2}$ ferromagnetik terlihat jelas dari fenomena degenerasi energi yang muncul pada keadaan eksitasi

magnon. Degenerasi dari bahan feromagnetik dalam perhitungan ini dapat terlihat lebih jelas dalam grafik plot antara energi ($E-E_0$) dengan bilangan gelombang. Energi akan selalu positif nilainya, terutama bila N bernilai besar dengan $r > 2$. Besar energi dispersi dari hasil keadaan terikat dengan $r \leq N/2$ dan N yang besar ($r > 2$) adalah:

$$E - E_0 = J(1 - \cos k)/r$$

DAFTAR ACUAN

- [1]. W. HEISSENBERG, *Z. Phys.* **38**, (1926), 441 ; P. DIRAC, *Proc. Roy. Soc.* **112 A**, (1926), 661.
- [2]. H. BETHE, *Z. Phys.*, **71**, (1931), 205.
- [3]. M. KARBACH, KUN HU, GERHARD MULLER, *Cond-mat/9809163 V1* (1998).
- [4]. G. H. COLUB AND C. F. VAN LOAN, *Matrix Computations* (John Hopkins, Baltimore, 1993).
- [5]. W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETERLING, AND B. FLANNER, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge (1992).
- [6]. GREINER, W., *Introduction to Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, (1995).