

REKONSTRUKSI KOORDINAT MENGGUNAKAN KOTAK REKONSTRUKSI DAN FOTO PROYEKSI SINAR-X

Achmad Suntoro
Pusat Rekayasa Perangkat Nuklir – BATAN

ABSTRAK

Telah diturunkan beberapa rumus matematik dalam proses rekonstruksi koordinat sebuah titik relatif terhadap sumbu koordinat yang ditetapkan. Proses rekonstruksi menggunakan bantuan kotak rekonstruksi berbentuk balok yang panjang tiap rusuknya diketahui, tiap sisi atas-bawah dan sisi kiri-kanan kotak diberi marker silang, serta sisi-atas dan sisi-samping kanan kotak merupakan bidang proyeksi oleh sinar-X dalam sistem proyeksi perspektif. Dengan menggunakan data dua foto proyeksi sinar-X, setiap titik di dalam kotak rekonstruksi yang proyeksinya terekam pada kedua foto proyeksi akan dapat ditentukan koordinatnya relatif terhadap titik tengah kotak rekonstruksi sebagai titik pusat koordinat.

Katakunci: rekonstruksi, koordinat, proyeksi, perspektif, kotak-rekonstruksi.

ABSTRACT

Some mathematical formula have been derived for a process of reconstruction to define the coordinate of any point relative to a pre set coordinate system. The process of reconstruction uses a reconstruction box in which each edge's length of the box is known, each top-bottom face and left-right face of the box having a cross marker, and the top face and the right face of the box as plane projections by X-ray source in perspective projection system. Using the data of the two X-ray projection images, any point inside the reconstruction box, as long as its projection is recorded in the two photos, will be determined its coordinate relative to the midpoint of the reconstruction box as the central point coordinates.

Keywords: reconstruction, coordinate, projection, perspective, reconstruction-box.

1. PENDAHULUAN

Proses rekonstruksi dapat berarti menemukan kembali sesuatu informasi pada suatu obyek yang semula mudah diperoleh karena sesuatu hal maka informasi tersebut tidak dapat lagi langsung diperoleh. Sebagai contoh, jika sebuah garis lurus berada di suatu sumbu koordinat dan jika koordinat dua titik berada di garis tersebut atau persamaan garis tersebut diketahui relatif terhadap sumbu koordinat tersebut, maka informasi koordinat titik-titik lain di garis tersebut akan mudah diketahui. Namun demikian jika garis tersebut terlepas dari sistim sumbu koorinat tersebut dan berada di sistem sumbu koordinat baru, maka informasi koordiant titik-titik di garis yang semula mudah diketahui tidak lagi mudah ditemukan di koordinat yang baru tersebut tanpa melakukan proses rekonstruksi terhadap garis tersebut pada sumbu koordinat yang baru.

Dalam proses brakhiterapi kanker servik misalnya, aplikator digunakan untuk jalur sumber radioaktif dalam memancarkan radiasinya untuk membunuh sel-sel kanker. Bentuk aplikator relatif terhadap suatu sumbu koordinat tertentu jelas diketahui, akan tetapi ketika aplikator dalam terapi (digunakan) dia akan terlepas dari sumbu koordinat asalnya, sehingga proses rekonstruksi perlu dijalankan pada posisi terapi tersebut sehingga pola isodosis (radiasi yang dipancarkan sumber radioaktif) ketika terapi dapat ditentukan.

Dalam banyak hal, proses rekonstruksi obyek geometri akan bermula dari rekonstruksi koordinat titik-titik penting yang mewakili obyek tersebut. Dalam makalah ini, proses rekonstruksi koordinat suatu obyek relatif terhadap suatu sumbu koordinat akan diturunkan menggunakan bantuan kotak rekonstruksi. Akan diturunkan rumus-rumus matematik menghitung

koordinat sembarang titik di dalam kotak rekonstruksi menggunakan bantuan dua foto proyeksi sinar-X tampak atas dan samping.

2. TEORI

2.1 GEOMETRI ANALISIS

Geometri disebut juga dengan *science*-ruang meskipun asal artinya pengukuran bumi^[1]. Ilmu ini mempelajari hubungan ruang dan bentuk dengan mengabaikan sifat-sifat lainnya seperti kerapatan, berat, warna dan lain-lain^[2]. Properti dari geometri ditentukan awalnya dari *axioma* yang di formulasikan oleh Euclid sekitar tahun 300 BC dan geometri tersebut disebut dengan *Euclidian Geometry* (geometri Euclid)^[3]. Dalam makalah ini titik, garis, bidang, dan keterkaitannya satu sama lain menjadi obyek yang akan digunakan. Karakteristik utama dalam analisis pengembangan geometri adalah penggunaan angka untuk menetapkan data geometri. Sistem koordinat diperlukan untuk perhitungan, oleh karena itu disebut juga dengan geometri koordinat atau geometri analisis^[1], dan sebuah titik di ruang dapat dituliskan oleh nilai koordinat nya yaitu (x, y, z) .

Salah satu dari lima postulat oleh Euclid^[4] adalah: sebuah garis lurus dapat dibentuk dari dua titik $K(x_1, x_1, z_1)$ dan $L(x_2, y_2, z_2)$. Sehingga dengan postulat ini panjang garis r dapat dihitung menggunakan persamaan Pythagoras:

$$r = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2} \quad (1)$$

Persamaan garis melalui dua titik tersebut adalah^[5]:

$$\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{Y - Y_1}{Y_2 - Y_1} = \frac{Z - Z_1}{Z_2 - Z_1} \quad (2)$$

Persamaan (2) adalah persamaan garis 3 dimensi. Sehingga jika ada dua garis di dalam ruang dan garis tersebut tidak sejajar, maka jika kedua garis tersebut berpotongan, misalnya di titik $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, maka koordinat titik Q dapat ditentukan menggunakan

persamaan (2) dari masing-masing garis tersebut. Jika garis kedua terbentuk dari dua titik $M(x_3, y_3, z_3)$ dan $N(x_4, y_4, z_4)$ maka menggunakan persamaan (2) akan diperoleh dua persamaan linier (3) dan (4) dengan dua bilangan anu X_Q dan Y_Q sebagai berikut:

$$X_Q = \frac{Y_Q - Y_1}{Y_2 - Y_1} (X_2 - X_1) + X_1 \quad (3)$$

$$X_Q = \frac{Y_Q - Y_3}{Y_4 - Y_3} (X_4 - X_3) + X_3 \quad (4)$$

Dari dua persamaan (3) dan (4) tersebut, maka nilai X_Q dan Y_Q dapat dihitung, sehingga nilai Z_Q juga dapat dihitung menggunakan X_Q dan Y_Q yang diperoleh ke persamaan (2) sebagai berikut:

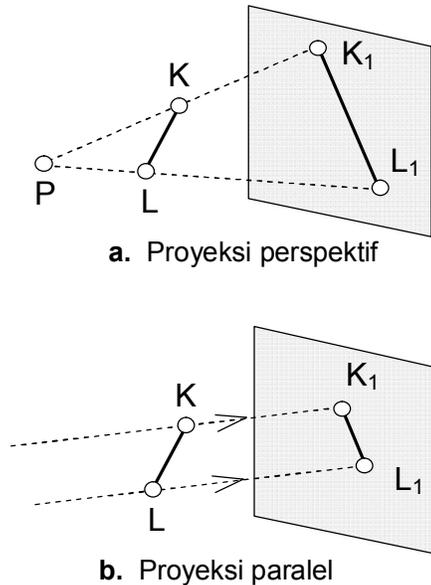
$$Z_Q = \frac{Y_Q - Y_1}{Y_2 - Y_1} (Z_2 - Z_1) + Z_1 \quad (5)$$

Koordinat titik potong dua garis di ruang 3 dimensi dapat ditentukan.

2.2 GEOMETRI PROYEKSI

Dalam teori proyeksi, dikenal istilah pusat proyeksi dan bidang proyeksi. Pusat proyeksi adalah titik bermulanya garis atau berkas-garis untuk memproyeksikan obyek ke bidang proyeksi. Garis atau berkas garis tersebut disebut garis-proyektor dan bidang dimana hasil proyeksi berada disebut bidang proyeksi. Jika pusat proyeksi berjarak terbatas (*finite*) maka sistem proyeksi disebut proyeksi perspektif, dan jika pusat proyeksi di titik tak terhingga (*infinite*) disebut proyeksi paralel.

Pada Gambar 1 titik P adalah pusat proyeksi, KL adalah garis yang diproyeksikan, K_1L_1 adalah hasil proyeksi pada bidang proyeksi, dan KK_1 , LL_1 adalah garis proyektor. Dengan pola sistem proyeksi tersebut, maka hukum-hukum trigonometri dan stereometri dapat diberlakukan untuk tujuan menyelesaikan suatu permasalahan yang berkaitan dengan geometri.



Gambar 1. Dua Proyeksi garis

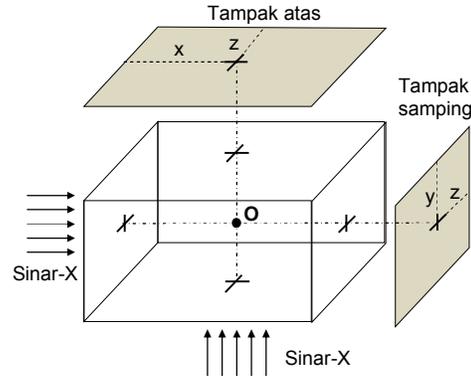
Dalam proyeksi, panjang hasil proyeksi tidak selalu sama dengan panjang garis yang diproyeksikan.

2.3 KOTAK REKONSTRUKSI

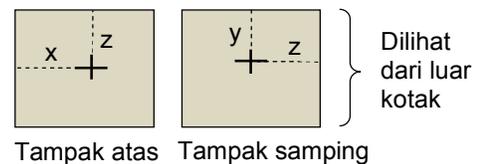
Untuk rekonstruksi koordinat, kotak rekonstruksi diciptakan sebagai alat bantu. Kotak ini prinsipnya berbentuk balok dengan semua panjang rusuk-rusuknya diketahui. Pada dua sisi samping dan dua sisi atas diberi tanda silang (*marker +*) tepat ditengah masing-masing sisi, sehingga garis yang menghubungkan masing-masing tanda silang tersebut akan berpotongan tepat di tengah (pusat) kotak. Obyek yang akan ditentukan koordinatnya (yang akan direkonstruksi) relatif terhadap titik tengah kotak tersebut dimasukkan ke dalam kotak. Dua sumber sinar-X untuk mendapatkan gambaran proyeksi dari titik yang di rekonstruksi diperlukan. Dari gambaran proyeksi oleh sinar-X tersebut koordinat titik ditentukan.

Gambar 2.a adalah kotak rekonstruksi dengan proyeksi sinar-X paralel dan orthogonal. Film sinar-X menempel pada sisi atas dan samping

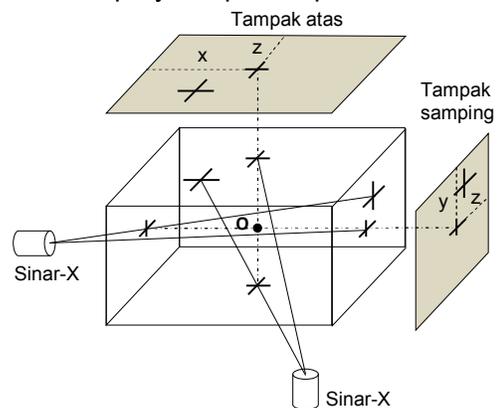
akan merekam proyeksi titik-titik yang ada di dalam kotak (Gambar 2.b). Untuk proyeksi paralel, koordinat titik di dalam kotak bisa langsung ditemukan karena proyeksi bersifat paralel dan tegak lurus (orthogonal) kotak rekonstruksi.



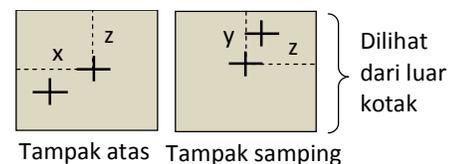
a. Proyeksi paralel pada kotak rekonstruksi



b. Hasil proyeksi paralel pada film sinar-X



c. Proyeksi perspektif pada kotak rekonstruksi



d. Hasil proyeksi perspektif pada film sinar-X

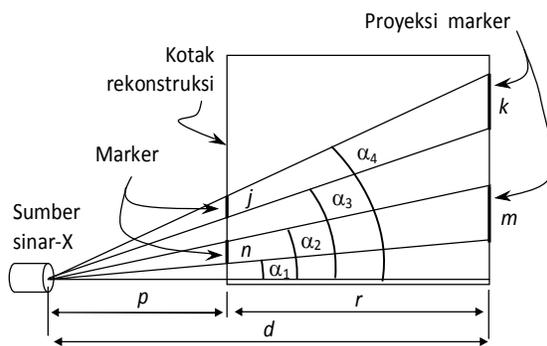
Gambar 2. Proyeksi sinar-X dengan kotak rekonstruksi

3. TATA KERJA

3.1 JARAK SUMBER SINAR-X KE KOTAK REKONSTRUKSI

Sinar-X sebagai perangkat untuk proyeksi bersifat perspektif karena jarak posisi pesawat sinar-X ke kotak rekonstruksi relatif dekat seperti ditunjukkan pada Gambar 3. Marker j dan n menempel pada sisi dekat sumber sinar-X dan hasil proyeksinya k dan m terekam oleh foto proyeksi sinar-X yang diletakkan pada sisi lainnya.

Dari Gambar 3 dapat diturunkan persamaan(6),(7),dan(8)sebagai berikut:



Gambar 3. Jarak orthogonal sumber sinar-X ke kotak rekonstruksi

$$\frac{k}{j} = \frac{d \operatorname{tg}(\alpha_4) - d \operatorname{tg}(\alpha_3)}{p \operatorname{tg}(\alpha_4) - p \operatorname{tg}(\alpha_3)} = \frac{d (\operatorname{tg}(\alpha_4) - \operatorname{tg}(\alpha_3))}{p (\operatorname{tg}(\alpha_4) - \operatorname{tg}(\alpha_3))} = \frac{d}{p} \quad (6)$$

$$\frac{m}{n} = \frac{d \operatorname{tg}(\alpha_4) - d \operatorname{tg}(\alpha_3)}{p \operatorname{tg}(\alpha_4) - p \operatorname{tg}(\alpha_3)} = \frac{d (\operatorname{tg}(\alpha_4) - \operatorname{tg}(\alpha_3))}{p (\operatorname{tg}(\alpha_4) - \operatorname{tg}(\alpha_3))} = \frac{d}{p} \quad (7)$$

$$p = \frac{r}{\frac{m}{j} - 1} \quad (8)$$

Jarak orthogonal sumber sinar-X terhadap sisi kotak rekonstruksi (p) dapat dihitung menggunakan persamaan (8). Dimanapun posisi sumber sinar-X asalkan hasil proyeksi markernya dapat ditangkap oleh foto proyeksi yang terletak seperti pada Gambar 3, maka persamaan (8) bisa berlaku. Tidak perlu sumber sinar-X berposisi orthogonal terhadap marker karena terbukti bahwa persamaan (6) dan (7) nilainya sama dan berasal dari dua marker j dan n yang tidak orthogonal terhadap sumber sinar-X. Dua sumber sinar-X untuk proses rekonstruksi koordinat dalam makalah

ini, mengacu pada persamaan (8) sehingga tidak perlu posisi sumber sinar-X tersebut harus isosentris dan orthogonal terhadap posisi marker dalam menggunakan persamaan (8).

3.2 KOORDINAT SUMBER SINAR-X

Koordinat sumber sinar-X dapat ditentukan menggunakan Gambar 4, dimana titik A adalah sumber sinar-X. Secara stereometris dibuat bidang dan garis bantu seperti pada Gambar 4 untuk menghitung koordinat titik A tersebut berdasarkan informasi dari foto sinar-X dan dimensi ukuran kotak rekonstruksi.

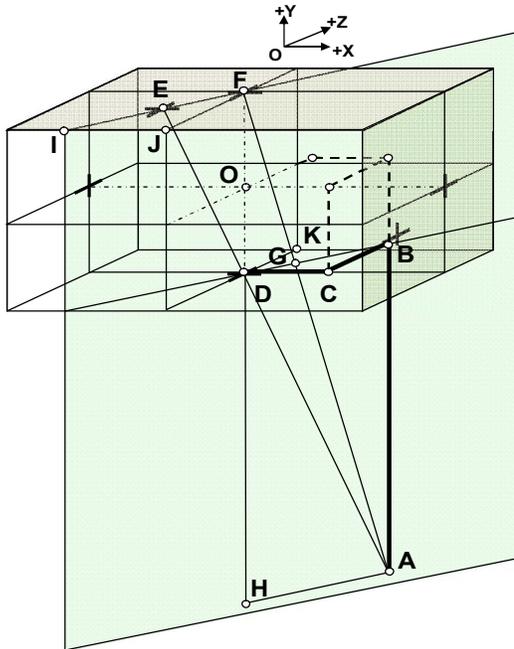
Dalam perhitungan koordinat dibuat agar semua parameter akhir dari penentu koordinat adalah parameter yang nilainya diketahui langsung baik dari foto sinar-X ataupun dari dimensi kotak rekonstruksi. Dengan pola ini dapat dipahami bahwa koordinat yang dihitung dapat ditentukan berdasarkan data yang telah ada.

Mengacu pada Gambar 4:

- Titik A adalah titik sumber sinar-X yang dicari koordinatnya.
- FD = tinggi kotak rekonstruksi.
- EF = dapat diukur langsung dari film sinar-X.
- FI= dapat diukur langsung dari film sinar-X.
- FJ= $\frac{1}{2}$ tebal kotak rekonstruksi.
- HD = nilai p persamaan (8).

Menggunakan rumus-rumus matematis trigonometri dan stereometri yang diaplikasikan ke kotak rekonstruksi dengan garis dan bidang bantu nya seperti pada Gambar 4, diperoleh persamaan (9), (10), dan (11), yaitu persamaan koordinat sumber sinar-X relatif terhadap titik O.

Selanjutnya untuk mendapatkan foto sinar-X tampak atas dan samping diperlukan dua posisi sumber sinar-X sebagai proyektor. Oleh karena itu koordinat dua sumber sinar-X tersebut harus diketahui relatif terhadap sumbu koordinat yang ditetapkan dalam kotak rekonstruksi, yaitu titik O.



Lihat $\triangle DEF$:

$$ED^2 = EF^2 + FD^2$$

$$\sin(\angle EDF) = \frac{EF}{ED}$$

$$\angle EDF = \sin^{-1}\left(\frac{EF}{ED}\right)$$

Lihat $\triangle IFJ$:

$$\cos(\angle IFJ) = \frac{FJ}{FI}$$

$$\angle IFJ = \cos^{-1}\left(\frac{FJ}{FI}\right)$$

Lihat $\triangle HDA$:

$$\angle HDA = \angle EDF$$

$$AD = HD \cos(\angle HDA)$$

$$HA = HD \operatorname{tg}(\angle HDA)$$

$$DB = HA$$

$$AB = HD$$

Lihat $\triangle CDB$:

$$\angle BDK = \angle IFJ$$

$$\angle CDB = 90^\circ - \angle BDK$$

$$BC = DB \sin(\angle CDB)$$

$$DC = DB \cos(\angle CDB)$$

Koordinat A relatif terhadap pusat koordinat O adalah:

$$X_A = DC ; Y_A = AB + 0.5FD ; Z_A = BC$$

$$X_A = HD \operatorname{tg}\left(\sin^{-1}\left(\frac{EF}{\sqrt{EF^2 + FD^2}}\right)\right) \cos\left(90^\circ - \cos^{-1}\left(\frac{FJ}{FI}\right)\right) \quad (9)$$

$$Y_A = HD + 0.5FD \quad (10)$$

$$Z_A = HD \operatorname{tg}\left(\sin^{-1}\left(\frac{EF}{\sqrt{EF^2 + FD^2}}\right)\right) \sin\left(90^\circ - \cos^{-1}\left(\frac{FJ}{FI}\right)\right) \quad (11)$$

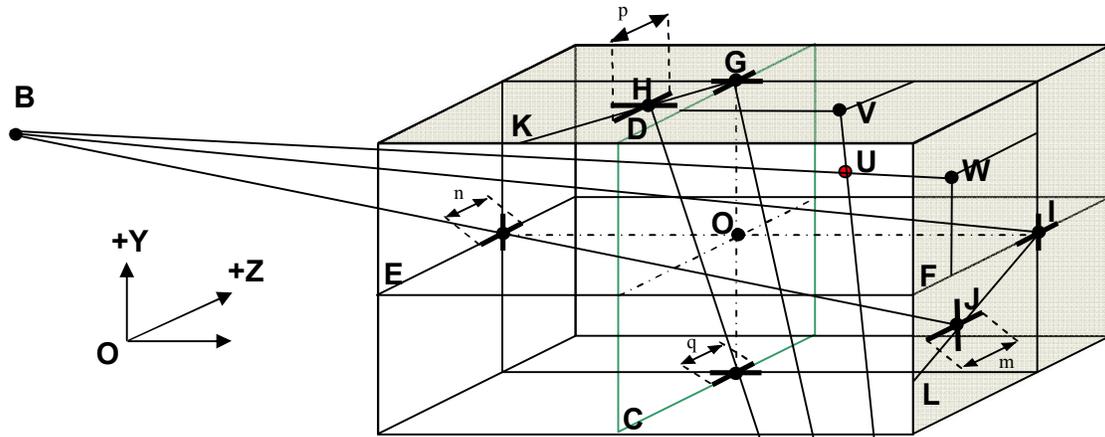
Gambar 4. Menentukan koordinat sumber sinar-X: $A(X_A, Y_A, Z_A)$

Dengan cara yang sama dalam menentukan persamaan (9), (10), dan (11), koordinat titik B sebagai sumber sinar-X tampak samping dapat ditentukan (Gambar 5). Persamaan (12) s/d (17) adalah koordinat dua sumber sinar-X A dan B dengan variable pembentuknya yang dapat diketahui.

3.3 KOORDINAT TITIK DI DALAM KOTAK REKONSTRUKSI

Dengan diketahuinya koordinat dua sumber sinar-X (A dan B), maka setiap titik di dalam kotak rekonstruksi dapat ditentukan koordinatnya dengan bantuan dua foto sinar-X tampak atas dan samping serta dimensi kotak rekonstruksi yang digunakan.

Titik U pada Gambar 5 adalah titik yang mewakili sembarang titik didalam kotak rekonstruksi. Koordinat titik V dan W dapat ditentukan dari foto proyeksi sinar-X karena kedua titik tersebut merupakan proyeksi dari titik U. Oleh karena itu dengan menggunakan persamaan (2), maka persamaan garis AV dan BW dapat ditentukan. Perpotongan antara garis AV dan BW adalah koordinat titik U yang dicari. Dengan menggunakan persamaan (3), (4), dan (5) maka koordinat U dapat di temukan, yaitu persamaan (18), (19), dan (20) pada Gambar 5.



$$X_A = \frac{CD}{\frac{p}{q} - 1} \operatorname{tg}\left(\sin^{-1} \frac{GH}{\sqrt{GH^2 + CD^2}}\right) \cos\left(90^\circ - \cos^{-1} \frac{GD}{GK}\right) \quad (12)$$

$$Y_A = \frac{CD}{\frac{p}{q} - 1} + 0.5 CD \quad (13)$$

$$Z_A = \frac{CD}{\frac{p}{q} - 1} \operatorname{tg}\left(\sin^{-1} \frac{GH}{\sqrt{GH^2 + CD^2}}\right) \sin\left(90^\circ - \cos^{-1} \frac{GD}{GK}\right) \quad (14)$$

$$X_B = \frac{EF}{\frac{m}{n} - 1} \operatorname{tg}\left(\sin^{-1} \frac{IJ}{\sqrt{IJ^2 + EF^2}}\right) \cos\left(90^\circ - \cos^{-1} \frac{IF}{IL}\right) \quad (15)$$

$$Y_B = \frac{EF}{\frac{m}{n} - 1} + 0.5 EF \quad (16)$$

$$Z_B = \frac{EF}{\frac{m}{n} - 1} \operatorname{tg}\left(\sin^{-1} \frac{IJ}{\sqrt{IJ^2 + EF^2}}\right) \sin\left(90^\circ - \cos^{-1} \frac{IF}{IL}\right) \quad (17)$$

$$X_U = X_A + (X_A - X_V) \left(\frac{X_B - X_A}{X_A - X_B + X_W - X_V} \right) \quad (18)$$

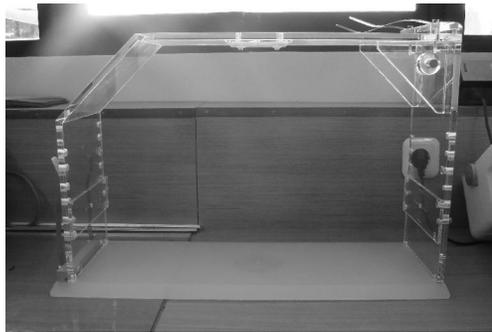
$$Y_U = Y_A + (Y_A - Y_V) \left(\frac{Y_B - Y_A}{Y_A - Y_B + Y_W - Y_V} \right) \quad (19)$$

$$Z_U = Z_A + (Z_A - Z_V) \left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_A - Z_B + Z_W - Z_V} \right) \quad (20)$$

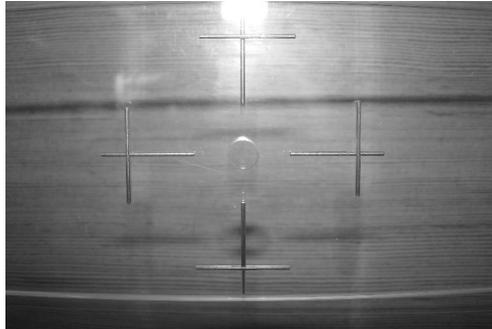
Gambar 5. Menentukan koordinat titik A(X_A, Y_A, Z_A), B(X_B, Y_B, Z_B), dan U(X_U, Y_U, Z_U)

4. PEMBAHASAN

Setiap titik didalam kotak rekonstruksi dapat di kenali koodinatnya dengan menggunakan persamaan (18), (19), dan (20). Panjang, lebar, dan tinggi kotak rekonstruksi harus diketahui ukurannya. Demikian juga ukuran marker harus diketahui karena semua ukuran tersebut dipakai sebagai alat bantu untuk rekonstruksi koordinat. Contoh kotak rekonstruksi dan salah satu marker pada kotak tersebut pada Gambar 6.



a. Kotak rekonstruksi.

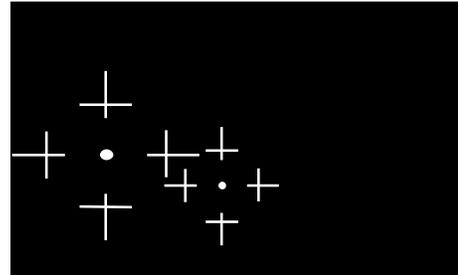


b. Marker salah satu sisi diperbesar.

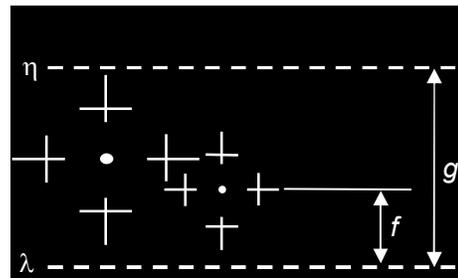
Gambar 6. Kotak rekonstruksi koordinat

Pada foto proyeksi sinar-X citra kotak rekonstruksi sama sekali tidak terlihat dan yang terlihat hanya ke empat markernya dan titik yang akan direkonstruksi karena terbuat dari logam yang tidak tembus oleh sinar-X. Oleh karena itu garis batas kotak rekonstruksi harus di rekonstruksi pada foto tersebut menggunakan proyeksi marker yang ada.

Persamaan (12) s/d (17) pada Gambar 5 memerlukan panjang garis GK dan IL. Titik G dan I dapat ditemukan pada foto proyeksi, tetapi titik K dan L bisa diketahui jika garis batas kotak rekonstruksi diketahui posisinya pada foto proyeksi.



a. Marker di foto proyeksi sinar-X.



b. Menentukan posisi batas kotak rekonstruksi di foto sinar-X.

Gambar 7. Menggunakan foto proyeksi.

Gambar 7.a adalah contoh foto proyeksi sinar-X, batas kotak rekonstruksi tidak terlihat. Untuk merekonstruksi batas kotak tersebut dilakukan seperti pada Gambar 7.b. Jarak pusat marker ke batas kotak diketahui nilainya f , maka garis λ dapat direkonstruksi, dan jarak antar batas kotak diketahui nilainya g , maka garis η dapat direkonstruksi. Garis λ dan η adalah salah satu batas dari kotak rekonstruksi. Batas yang lain dapat direkonstruksi menggunakan cara yang sama.

Marker yang dipakai sebagai referensi penentu garis batas adalah marker yang posisinya menempel pada foto proyeksi. Marker yang tidak menempel pada foto proyeksi akan di proyeksikan dengan ukuran yang lebih

besar, karena terjadi proyeksi perspektif oleh sinar-X sedangkan marker yang menempel pada foto proyeksi ukurannya tetap.

Dengan diketahuinya batas-batas kotak rekonstruksi, maka titik K dan L dapat ditentukan dan panjang GK dan IL dapat diketahui. Variabel-variabel lain yang diperlukan oleh persamaan-(12) s/d (17) dapat ditentukan, sehingga koordinat titik di dalam kotak rekonstruksi dapat ditentukan.

Dengan kotak rekonstruksi dan dua foto proyeksi sinar-X tampak atas dan samping, maka titik yang ditentukan melalui dua foto proyeksi tersebut dapat diketahui koordinatnya. Fenomena ini dapat digunakan untuk merekonstruksi posisi sebuah obyek relatif terhadap titik pusat koordinat kotak rekonstruksi sehingga obyek tersebut dapat terdefinisi secara koordinat. Kondisi ini diperlukan pada proses brakhiterapi kanker servik misalnya, yaitu mengetahui posisi aplikator yang digunakan ketika terapi (berada di tubuh pasien). Koordinat-koordinat aplikator diperlukan untuk menghitung laju dosis suatu tempat disekitar aplikator.

5. KESIMPULAN

Proses rekonstruksi koordinat menggunakan kotak rekonstruksi dan dua foto proyeksi sinar-X hanya bisa

digunakan jika titik yang akan ditentukan koordinatnya dapat terekam oleh foto proyeksi sinar-X. Dua posisi sumber sinar-X relatif terhadap kotak rekonstruksi tidak harus orthogonal dan isocentris, tetapi cukup mendekati nya. Mendekati orthogonal diterapkan untuk meyakinkan bahwa proyeksi titik yang akan diketahui koordinatnya akan jatuh (terekam) ke foto proyeksi sinar-X. Penggunaan komputer dan proses interaktifnya akan mempermudah proses rekonstruksi, dengan terlebih dahulu foto proyeksi di *scan* dan dibaca oleh komputer.

6. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Abbot P., Trigonometry., Hodder and Stoughton., Kent., 1970.
- [2] Encyclopedia of Mathematics., Vol. 7., 1989, pp. 261-262.
- [3] Lathrop TG dan Stevens LA., Geometry a Contemporary Approach., Wadsworth Publishing Company., Belmont., 1967.
- [4] Coexter H S M., Introduction to Geometry., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.
- [5] Nikos Drakos., Computer Based Learning Unit, University of Leeds., <http://cs.fit.edu/~wds/classes/cse5255/thesis/lineEqn/lineEqn.htm>
Diambil Oktober 2011.